Diskrete Zufallsvariable (Übungen)

1. Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte 1, 2, 3, und 4 mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,4	0,3	0,2	

   a) Ergänze die fehlende Wahrscheinlichkeit für X = 4.
   b) Erstelle eine Tabelle der Verteilungsfunktion.
   c) Zeichne die Graphen von Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion.
   d) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der Verteilung.

2. Eine Urne enthält 3 rote und 6 blaue Kugeln.
   a) Es wird 3 mal je eine Kugel gezogen, wobei die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird (Ziehen ohne Zurücklegen). Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.
      - Erstelle eine Tabelle der Wahrscheinlichkeits- und der Verteilungsfunktion.
      - Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion in einem Histogramm dar.
      - Berechne Erwartungswert und Standardabweichung von X.

   b) Wie a, aber die gezogene Kugel wird nach jedem Zug zurückgelegt, und es wird eine weitere Kugel von derselben Farbe in die Urne gelegt.

3. Maria würfelt zwei mal mit einem vierseitigen Würfel.

   a) Die Zufallsvariable X gibt die Summe der geworfenen Zahlen an. (Bild: Wikimedia Commons)
      - Stelle alle möglichen Ausgänge in einer Tabelle dar.
      - Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion an und zeichne ein Histogramm.
      - Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

   b) Wie a, aber die Zufallsvariable Y ist die größere der beiden Zahlen.

4. In einem Geldbeutel befinden sich fünf 1-Euro-, vier 2-Euro- und ein 5-Euro-Stück(e). Zwei Münzen werden zufällig herausgenommen. Die Zufallsvariable X ist die Summe der beiden Werte in Euro.
   a) Erkläre, warum die Summe nicht 1 oder 5 betragen kann.
   b) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte von X.
   c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung.

Binomialverteilung

5. Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für
   a) genau einmal „Kopf“,
   b) genau zweimal „Kopf“,
   c) nie „Kopf“,
   d) höchstens zweimal „Kopf“,
   e) mindestens einmal „Kopf“.
6. Ein fairer (sechsseitiger) Würfel wird achtmal geworfen. Gib Formeln für die Wahrscheinlichkeit an, dass
   a) genau einmal "Eins" geworfen wird,
   b) höchstens einmal "Eins" geworfen wird,
   c) mindestens einmal "Eins" geworfen wird!
7. 30 % aller Österreicher/innen im Alter von 25 bis 64 Jahren haben Matura. Erkläre, welche Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang mit folgenden Formeln berechnet werden:
   a) $\mathrm{P(E)} = 0{,}3^{10}$
   b) $\mathrm{P(E)} = 1 - 0{,}7^{10}$
   c) $\mathrm{P(E)} = \binom{10}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7$
8. Zwei Tennisspielerinnen spielen 7 Matches gegeneinander. A ist die schwächere Spieler in, ihre Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 0,4.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A
   a) genau 3 mal gewinnt,
   b) mehr als die Hälfte der Spiele gewinnt?
   c) Ermittle den Erwartungswert für die Anzahl der von A gewonnenen Spiele.
9. Bei einer Tombola gewinnt jedes 5. Los. Frau Gruber kauft 20 Lose.
   Gib an, was mit den folgenden Formeln hier berechnet wird:
   a) $P(A) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16}$
   b) $P(B) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} + \binom{20}{5} \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{15}$
   c) $P(C) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{18}$
10. Ein Basketballspieler trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8. Er wirft 10 mal auf den Korb. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   a) jedesmal trifft,
   b) mindestens 8 mal trifft?

11. Angenommen, alle Wochentage treten gleich oft als Geburtstage auf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 4 Kindern mindestens ein Sonntagskind ist?

b) In einer Klasse sind 25 Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben nicht mehr als 3 an einem Sonntag Geburtstag?

12. Zwei Drittel aller Hühnereier sind braun. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 Eiern

a) genau 8 braune sind,

b) mindestens 10 braune sind.

13. 5% aller Glühbirnen, die von einer bestimmten Maschine erzeugt werden, sind defekt. Bei einer Qualitätskontrolle werden 10 Glühbirnen getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) höchstens eine defekte darunter ist,

b) mindestens eine defekte darunter ist?

14. Beim indischen Spiel "Pachisi", der Urform von "Mensch ärgere dich nicht", würfelt man mit fünf Kaurischnecken und zählt, wie viele Öffnungen nach oben zeigen (das bezeichnen wir als "Treffer").

a) Markus wirft 10 Schnecken, davon bleiben 3 mit der Öffnung nach oben liegen. Er erklärt: "Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Öffnung nach oben zeigt, $\frac{3}{10}$ bzw. 0,3." Erkläre, warum dieser Schluss falsch ist.

b) Nach einer größeren Zahl von Versuchen erhält man eine Wahrscheinlichkeit von 0,42 für einen Treffer. Interpretiere die folgende Formel in diesem Sachzusammenhang:

$$P(E) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} \cdot 0{,}42^{i} \cdot 0{,}58^{5-i}$$

c) Wenn 1 bis 5 Öffnungen nach oben zeigen, erhält der Spieler die entsprechende Anzahl an Punkten. Bei 0 Treffern erhält er 25 Punkte. Berechne den Erwartungswert für die erreichte Punktezahl bei einem Wurf.

15. Du würfelst 10 mal mit einem sechsseitigen Würfel. Argumentiere, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Sechser zu würfeln, beträgt 1 minus der Wahrscheinlichkeit, höchstens zwei Sechser zu würfeln,

b) Wenn die Anzahl der Würfe verzehnfacht wird (d.h. du würfelst 100 mal), verzehnfacht sich auch der Erwartungswert für die Anzahl der Sechser.
c) Es ist genauso wahrscheinlich, bei 10 Versuchen höchstens einen Sechser zu erhalten, wie bei 100 Versuchen höchstens 10 Sechser.

16. In einer Urne befinden sich 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 beschriftet sind (wie bei der Lottoziehung). Gib Formeln für die folgenden Wahrscheinlichkeiten an und berechne sie:
a) Es wird eine Kugel gezogen; darauf steht eine einstellige Zahl.
b) Es werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; darunter befindet sich mindestens eine einstellige Zahl.
c) Es werden 6 Kugeln mit Zurücklegen gezogen; darunter befindet sich mindestens eine einstellige Zahl.
d) Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die Kugel mit der Nummer 1 kommt; das ist beim 6. Versuch der Fall.
e) Es wird so lange mit Zurücklegen gezogen, bis die Kugel mit der Nummer 1 kommt; das ist beim 6. Versuch der Fall.
f) Argumentiere, in welcher dieser Aufgaben Binomialverteilung vorliegt.

(*) Hypergeometrische Verteilung

17. In einem Korb liegen 30 Eier, 20 davon sind braun. Christoph nimmt 12 Eier heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter
a) genau 8 braune sind,
b) mindestens 10 braune sind?
c) Erkläre, warum du hier andere Ergebnisse erhältst als in Beispiel 12.

18. Eine Firma erhät eine Lieferung von 60 Glühbirnen, von denen 3 defekt sind. Es werden 10 Glühbirnen kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) höchstens eine defekt ist,
b) mindestens eine defekt ist? (Vergleiche mit Beispiel 13!)

19. Beim Lotto "6 aus 45" muss man von 45 Zahlen 6 ankreuzen, 6 Zahlen werden gezogen. Interpretiere die folgenden Formeln in diesem Zusammenhang.
a) $P(A) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{45}{6}}$
b) $P(B) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{39}{6}}{\binom{45}{6}}$

20. Beim Schnapsen verwendet man 20 Karten, von denen jeder Spieler 5 erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler

a) 2 Asse
b) 4 Zehner
c) mindestens 3 Herzkarten bekommt?

21. In eine Klasse gehen 12 Burschen und 15 Mädchen. Es werden 6 Schüler ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass davon

a) mindestens einer ein Bursch ist?
b) mehr Burschen als Mädchen sind?
c) alle das selbe Geschlecht haben?

Ergebnisse

1.

a) P(X=4) = 0,1

b)

x_i	1	2	3	4
$P(X\le x_i)$	0,4	0,7	0,9	1,0

c)

d) μ = 2, σ = 1

2.

a)

x_i	$P(X=x_i)$	$P(X\le x_i)$
0	$\frac{20}{84}$	$\frac{20}{84}$
1	$\frac{45}{84}$	$\frac{65}{84}$
2	$\frac{18}{84}$	$\frac{83}{84}$
3	$\frac{1}{84}$	1

μ = 1, σ = 0,707

b)

x_i	$P(X=x_i)$	$P(X\le x_i)$
0	$\frac{56}{165}$	$\frac{56}{165}$
1	$\frac{63}{165}$	$\frac{119}{165}$
2	$\frac{36}{165}$	$\frac{155}{165}$
3	$\frac{10}{165}$	1

μ = 1, σ = 0,894

3.

a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\mu = 5$, $\sigma = 1{,}581$

b)

y_i	1	2	3	4
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

$\mu = 3{,}125$, $\sigma = 0{,}927$

4.

a) Die Summe ist mindestens 2 €, weil man zwei Münzen zieht.
Die Summe kann nicht 5 € sein, weil man mit zwei 1 €- oder 2 € Münzen höchstens auf 4 € kommt und mit 5 € + einer weiteren Münze auf über 5 €.

b)

x_i	2	3	4	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$

$\mu = 3{,}6$ €, $\sigma = 1{,}555$ €

5. a) 0,0938 b) 0,2344 c) 0,0156 d) 0,3438 e) 0,9844

6.

a) $P(X=1) = \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$

b) $P(X \leq 1) = \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$

c) $P(X \geq 1) = 1 - \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

7. Von 10 zufällig ausgewählten Österreicher/innen haben (hat)

a) alle 10 Matura

b) mindestens eine/r Matura

c) genau 3 Matura

8. a) 0,2903 b) 0,2898 c) $\mu = 2{,}8$

9.

a) Frau Gruber gewinnt 4 mal.

b) Sie gewinnt 3 bis 5 mal.

c) Sie gewinnt mindestens 3 mal.

10. a) 0,1074 b) 0,6778

11. a) 0,4602 b) 0,5119

12. a) 0,2384 b) 0,1811

13. a) 0,9139 b) 0,4013

14.

a) Das Ereignis "3 Erfolge" ist zufällig eingetreten, p kann höher oder niedriger als 0,3 sein.

b) Es wird die Wahrscheinlichkeit für 3 bis 5 Treffer bei einem Wurf mit 5 Schnecken berechnet.

c) $\mu = 3{,}74$

15.

a) falsch (Gegenereignis zu „mindestens 2 Sechser" ist „höchstens 1 Sechser")

b) richtig ($\mu = n \cdot p$, d.h. wenn n verzehnfacht wird, wird auch μ verzehnfacht)

c) falsch ($P(X \leq 1$ bei 10 Versuchen$) = 0{,}4845$,
$P(X \leq 10$ bei 100 Versuchen$) = 0{,}0427$)

16.

a) $\mathrm{P} = \frac{9}{45} = 0{,}2$

b) $\mathrm{P} = 1 - \frac{36}{45} \cdot \frac{35}{44} \cdot \frac{34}{43} \cdot \frac{33}{42} \cdot \frac{32}{41} \cdot \frac{31}{40} = 0{,}761$

c) $\mathrm{P} = 1 - \left(\frac{36}{45}\right)^6 = 0{,}738$

d) $\mathrm{P} = \frac{44}{45} \cdot \frac{43}{44} \cdot \frac{42}{43} \cdot \frac{41}{42} \cdot \frac{40}{41} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{45} = 0{,}022$

e) $\mathrm{P} = \left(\frac{44}{45}\right)^5 \cdot \frac{1}{45} = 0{,}020$

f) c; es gibt zwei Möglichkeiten (einstellige oder zweistellige Zahl), Wahrscheinlichkeit bleibt bei jedem Versuch gleich

17. a) 0,3058 b) 0,1170

c) Hier handelt es sich um Ziehen mit Zurücklegen, also muss die hypergeometrische Verteilung angewendet werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein braunes Ei ist abhängig davon, was vorher gezogen wurde.

18. a) 0,9307 b) 0,4272

19.

a) Es wurden 4 richtige Zahlen angekreuzt.

b) Es wurde mindestens eine richtige Zahl angekreuzt.

20. a) 0,2167 b) 0,0010 c) 0,0726

21. a) 0,9831 b) 0,2188 c) 0,0200