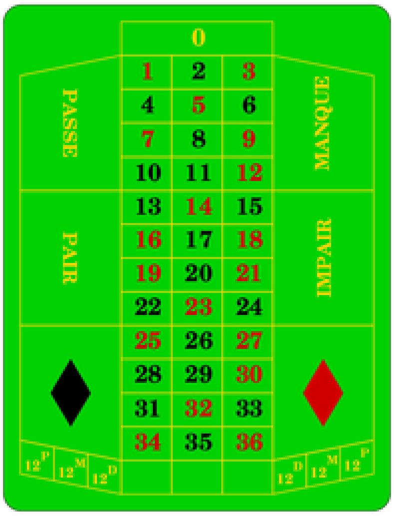
Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übungen)

1. Ein Kartenspiel besteht aus 52 Karten (je 13 von jeder Farbe: Herz, Karo, Pik und Kreuz). Eine Karte wird gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie
   a) eine Herzkarte,
   b) ein Ass,
   c) eine Bildkarte (Bube, Dame oder König),
   d) eine rote Karte (Herz oder Karo),
   e) die Pik-Dame,
   f) kein Ass,
   g) keine Herzkarte,
   h) eine Kreuzkarte, aber kein Ass ist?

2. Beim französischen Roulette gibt es 37 Zahlen. Davon sind 18 rot, 18 schwarz und die Null ist grün. Gib die jeweiligen Gewinnchancen für die folgenden Spielmöglichkeiten an.
   a) einfache Chancen: Rot, Schwarz, Gerade, Ungerade, Manque (1 - 18), Passe (19 - 36); die Null wird dabei nie mitgerechnet
   b) Plein: eine Zahl
   c) Cheval: zwei benachbarte Zahlen
   d) Transversale pleine: eine Querreihe
   e) Carré: vier Zahlen im Quadrat
   f) Transversale simple: zwei benachbarte Querreihen
   g) Colonne: eine Längsreihe



3. Von den 40 Angestellten einer Firma sprechen insgesamt 30 Englisch und 12 Französisch. 5 Personen beherrschen beide Fremdsprachen (siehe Mengenlehre – Übungen, Bsp. 8). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Angestellter
   a) Englisch spricht,
   b) nicht Französisch spricht,
   c) beide Fremdsprachen spricht,
   d) mindestens eine Fremdsprache spricht,
   e) Französisch spricht, wenn schon bekannt ist, dass er Englisch spricht?

4. Angenommen, 40% eines Altersjahrgangs machen Matura, 80% aller Maturanten beginnen ein Studium und 50% aller Studenten schließen ihr Studium ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jugendlicher ein Studium abschließt?
5. Du würfelst mit zwei Würfeln. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher?
    - Die Augensumme beträgt 7.
    - Die Augensumme beträgt mindestens 10.
6. Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide Male auf die gleiche Seite fällt,
    a) wenn es sich um eine faire Münze handelt,
    b) wenn die Münze manipuliert ist, so dass sie bei drei von vier Versuchen „Kopf" zeigt?
7. Der Wetterbericht gibt an, dass am Samstag mit der Wahrscheinlichkeit p_1 (80 %) und am Sonntag mit der Wahrscheinlichkeit p_2 (70 %) Schönwetter zu erwarten ist. Gib Formeln für die folgenden Wahrscheinlichkeit an und berechne sie.
    a) Das Wetter ist an beiden Tagen schön.
    b) Das Wetter ist an mindestens einem Tag schön.
    c) Erkläre, warum es bei b) einfacher ist, mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen.
8. Ein Basketballspieler wirft 3 mal auf den Korb und trifft jedesmal unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p. Erkläre, was die folgenden Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang bedeuten:
    a) $P(A) = p^3$
    b) $P(B) = 1 - p^3$
    c) $P(C) = (1 - p)^3$
    d) $P(D) = 1 - (1 - p)^3$
9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
    a) dass zwei Personen am gleichen Wochentag geboren sind,
    b) dass von drei Personen mindestens zwei am gleichen Wochentag geboren sind?
10. Bei der Lotterie „Sonnenschein" gewinnt jedes fünfte Los, bei der „Glückskäfer"-Lotterie nur jedes zehnte. Argumentiere, wann deine Chance, mindestens einen Preis zu gewinnen, höher ist: wenn du ein „Sonnenschein"-Los oder zwei „Glückskäfer"-Lose kaufst.

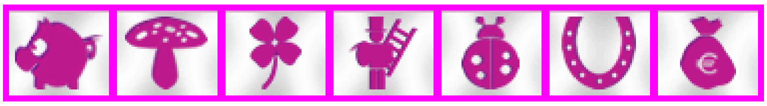
11. Beim Spiel "ToiToiToi" wird eine fünfstellige Zahl und eines von sieben Glückssymbolen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) das Symbol

b) nur die letzte Ziffer (und die vorletzte nicht)

c) nur die letzten zwei (drei, vier) Ziffern

d) alle fünf Ziffern und das Symbol mit dem abgegebenen Tipp übereinstimmen?



12. Bis Ende 2018 wurde im ORF die "Brieflos-Show" gesendet. In jedem 5. Brieflos befand ein Anmeldecoupon. Jede Woche wurden aus ca. 70000 eingesandten Coupons 2 gezogen. Die Kandidaten durften ein Glücksrad mit 80 Feldern drehen, von denen 3 zum Hauptgewinn führen.

a) Wie groß war beim Kauf eines Briefloses die Wahrscheinlichkeit, ins Fernsehen zu kommen und den Hauptpreis zu gewinnen?

b) Gib an, was mit der folgenden Ungleichung in diesem Zusammenhang berechnet wird:

$$1-\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}97$$

13. Beim Zahlenlotto ("Kleines Lotto") werden aus 90 Zahlen fünf gezogen. Es gibt verschiedene Spielmöglichkeiten. Berechne die jeweiligen Gewinnchancen für deie folgenden Spiele:

a) Extrakt: Man kreuzt eine Zahl an und gewinnt, wenn sie unter den fünf gezogenen ist.

b) Ruf: Man kreuzt eine Zahl an und gewinnt, wenn sie als erste gezogen wird.

c) Ambo: Man kreuzt zwei Zahlen an und gewinnt, wenn sie unter den fünf gezogenen sind.

d) Terno: Man kreuzt drei Zahlen an und gewinnt, wenn sie unter den fünf gezogenen sind.

14. In einer Werbezusendung der Klassenlotterie heißt es: „Schauen Sie gleich nach...! Wie hoch sind Ihre Gewinn-Chancen: 63,20 % oder 86,46 %? Oder gehören Sie sogar zu den wenigen Auserwählten in Wien, die mit dem GOLDENEN LOS und einer TOP-GEWINN-CHANCE von 95,02 % (...) ins Rennen gehen? Wenn ja, sind Sie ein Glückspilz!“

Laut Homepage der Klassenlotterie beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Los 63,2 %.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit zwei bzw. drei Losen mindestens einmal zu gewinnen.

b) Argumentiere, was von der Aussage in der Werbung zu halten ist.

15. Begründe, mit welcher der folgenden Formeln die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, bei 4-maligem Würfeln mit einem Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen:

- $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{6}$
- $P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$
- $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

16. Problem des *Chevalier de Méré*: Ist es wahrscheinlicher,

a) bei viermaligem Würfeln mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen

b) oder bei 24maligem Würfeln mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

17. Wie oft muss man mit zwei Würfeln würfeln, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

18. In jedem 7. Überraschungsei ist eine Sammelfigur. Wie viele Eier muss man kaufen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Figur zu bekommen?

Zeichne bei den folgenden Aufgaben ein Baumdiagramm.

19. In einer Urne sind zwei weiße und eine schwarze Kugel(n).

a) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beide Male eine weiße Kugel zu ziehen?

b) Wie a, aber ohne Zurücklegen.

20. In einer Urne sind 5 rote und 5 blaue Kugeln. Es wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) drei rote Kugeln

b) eine rote und zwei blaue Kugeln (in dieser Reihenfolge)

c) genau zwei blaue Kugeln (in beliebiger Reihenfolge) zu ziehen?

21. Wie 20., aber ohne Zurücklegen.

22. Im einem Korb liegen 6 schwarze, 4 blaue und 2 graue Socken. Jemand nimmt blind zwei Socken heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Farbe haben?

23. Ein Student darf bei einer Prüfung 2 von 30 Prüfungsfragen ziehen. Er hat 25 Fragen gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
 a) beide Fragen
 b) die erste, aber nicht die zweite Frage
 c) mindestens eine Frage beantworten kann?

24. In einem Geldbeutel befinden sich fünf 1-Euro-, vier 2-Euro- und ein 5-Euro-Stück(e). Zwei Münzen werden zufällig herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe
 a) genau 3 Euro
 b) mehr als 5 Euro beträgt?

25. (*) Auf dem Tisch stehen drei gleich aussehende Schachteln. Eine enthält zwei weiße Kugeln, die andere zwei schwarze und die dritte eine weiße und eine schwarze Kugel. Jemand greift blind in eine Schachtel und zieht eine weiße Kugel heraus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Kugel in dieser Schachtel ebenfalls weiß ist?

Ergebnisse:

1. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{3}{13}$ d) $\frac{1}{2}$
 e) $\frac{1}{52}$ f) $\frac{12}{13}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{3}{13}$
2. a) $\frac{18}{37}$ b) $\frac{1}{37}$ c) $\frac{2}{37}$ d) $\frac{3}{37}$
 e) $\frac{4}{37}$ f) $\frac{6}{37}$ g) $\frac{12}{37}$
3. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{37}{40}$ e) $\frac{1}{6}$
4. 0,16
5. Beide Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{6}$.
6. a) P(KK oder ZZ) = 0,5 b) P(KK oder ZZ) = 0,625
7.
 a) P(beide Tage schön) = $p_1 \cdot p_2$ (0,56)
 b) P(mindestens ein Tag schön) = $1 - (1 - p_1)\cdot(1 - p_2)$ (0,94)

c) Bei einer direkten Berechnung muss man drei Wahrscheinlichkeiten berechnen, bei Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur eine.

8.

a) Er trifft 3 mal.

b) Er trifft nicht 3 mal (er wirft mindestens 1 mal daneben).

c) Er wirft 3 mal daneben (er trifft nie).

d) Er trifft mindestens 1 mal.

9. a) $\frac{1}{7}$ b) 0,388

10. Sonnenschein: P(Gewinn) = 0,2

Glückskäfer: P(mindestens 1 Gewinn) = 1 - $0{,}9^2$ = 0,19, also kleiner

11. a) $\frac{1}{7}$ b) 0,09 c) 0,009 (0,0009, 0,00009) d) 0,0000014

12.

a) ≈ 0,0000002

b) n ist die Anzahl Lose, die man kaufen muss, um mit mindestens 97 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen Anmeldecoupon zu erhalten

13. a) $\frac{1}{18}$ b) $\frac{1}{90}$ c) 0,0025 d) 0,000085

14.

a) 2 Lose: $P(X \geq 1) = 1 - (1 - 0{,}632)^2 = 0{,}8646$

3 Lose: $P(X \geq 1) = 1 - (1 - 0{,}632)^3 = 0{,}9502$

b) Die „Top-Gewinn-Chance“ hat nichts damit zu tun, ob man ein Glückspilz ist, sondern besteht nur darin, dass man drei Lose kauft.

15. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (Gegenereignis zu „Es wird keine Sechs geworfen“)

16. a) 0,518 (also höhere Wahrscheinlichkeit) b) 0,491

17. 82 mal

18. 20

19. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{3}$

20. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{8}$

21. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{5}{12}$

22. $\frac{1}{3}$

23. a) 0,690 b) 0,144 c) 0,977

24. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{5}$

25. $\frac{2}{3}$