Trigonometrie (Rechtwinkelige Dreiecke)

Mache bei den folgenden Beispielen zuerst eine Skizze.

1. Ein Papierdrache fliegt an einer 80 m langen Schnur, die mit dem Boden einen Winkel von 67° einschließt. Wie hoch fliegt der Drache?
2. Eine 5 m lange Leiter lehnt an einer Wand. Sie ist unter 75° zum Boden geneigt. Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?
3. Die Spitze eines 200 m entfernten Turmes wird unter dem Höhenwinkel 22° gesehen. Wie hoch ist der Turm?
4. Wie hoch ist ein Baum, der bei einem Sonnenstand von 52° einen 6,3 m langen Schatten wirft?
5. Der Stephansturm in Wien ist 137 m hoch.
   a) Stelle eine Formel für die Länge des Schattens abhängig von Sonnenstand φ auf.
   b) Berechne, um wie viel der Schatten des Stephansturms am 21. Dezember länger ist als am 21. Juni.
   (Geographische Breite $\beta = 48{,}2°$
   Sonnenstand am 21. 12.: $\varphi_1 = 90° - \beta - 23{,}5°$
   Sonnenstand am 21. 6.: $\varphi_2 = 90° - \beta + 23{,}5°$)
6. Ein Förderband reicht über eine horizontale Entfernung von 4 m und steigt in einem Winkel von 30° an. Wie lang ist das Band?
7. Die Sommerrodelbahn in Abtenau (Salzburg) hat im Durchschnitt 11,65° Gefälle. Der Höhenunterschied beträgt 400 m. Wie lang ist die Rodelstrecke?
8. Wie hoch steht die Sonne, wenn ein 5 m hoher Fahnenmast einen 7,5 m langen Schatten wirft?
9. Eine vom Einsturz bedrohte Mauer wird mit 7 m langen Pfosten abgestützt, die 4 m von der Mauer entfernt im Boden verankert werden. Unter welchem Winkel sind die Pfosten zum Boden geneigt?
10. Die Schafbergbahn überwindet auf einer Länge von 5,8 km den Höhenunterschied zwischen St. Wolfgang (542 m) und Schafbergspitze (1732 m). Berechne den durchschnittlichen Anstiegswinkel.

11. Berechne bei den folgenden rechtwinkeligen Dreiecken die fehlenden Seiten und Winkel.
(c ist die Hypotenuse, α liegt gegenüber von a und β gegenüber von b.)

	a	b	c	α	β
a)	3		5		
b)	7,5			45°	
c)			7,49	25,64°	
d)			19,88		39,69°
e)		6,18	10,48		
f)	25,41				53,15°
g)		17,86		77,13°	
h)	20	21			
i)			8,98	15,04°	
j)		63,04			56,78°
k)		225,00	290,15		
l)	365			51,44°	
m)	77,11		93,11		
n)		83,8			19,50°
o)		34,50		59,14°	
p)		7,61	20,82		
q)			100,28		76,08°
r)	55,23				46,26°
s)	1,37	5,08			
t)	14,17		15,15		

12. Ein Rechteck hat die Seitenlängen a = 35, b = 14. Berechne die Länge der Diagonale und die Winkel, die die Diagonale mit den Seiten einschließt.

13. Ein gleichschenkeliges Dreieck hat die Seitenlängen a = b = 50, c = 52. Berechne die Winkel und die Höhe.

14. Von einer Raute kennt man die Seite a = 12,5 und den Winkel α = 41,2°. Berechne die Länge der Diagonalen.

15. Welchen Winkel schließt die Raumdiagonale eines Würfels

a) mit einer Seitenkante

b) mit einer Seitenfläche

c) mit einer anderen Raumdiagonalen ein?

16. **Cheopspyramide**

Die Cheopspyramide ist eine quadratische Pyramide. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt a = 230 m und die Höhe h = 147 m.

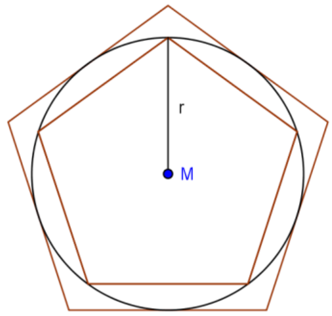
Unter welchem Winkel sind

a) die Seitenflächen,

b) die Seitenkanten zum Boden geneigt?

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

17. **Regelmäßige Vielecke**



a) Berechne die Seitenlänge, den Umfang und den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks, das einem Kreis mit dem Radius r = 5 cm

- eingeschrieben ist,
- umschrieben ist.

b) Wie a) für ein regelmäßiges Achteck.

c) Gib eine allgemeine Formel für den Umfang eines regelmäßigen n-Ecks an, dass einem Kreis mit dem Radius r eingeschrieben bzw. umschrieben ist. Erkläre, wie man daraus die Zahl π berechnen kann. (Archimedes fand mit Hilfe des regelmäßigen 96-Ecks die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.)

Vermessungsaufgaben

18. Um die Breite eines Flusses zu vermessen, steckt man an einem Ufer eine Standlinie AB ab. Der Punkt P liegt am anderen Ufer. Man misst zwei der Horizontalwinkel $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$ und $\angle APB = \gamma$. Berechne die Flussbreite. (Tipp: Die Höhe auf AB teilt das Dreieck SBP in zwei rechtwinkelige Dreiecke.)

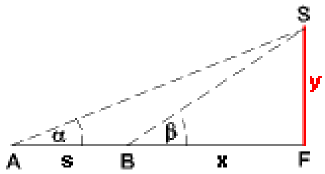
a) AB = 56 m, α = 67,5°, β = 54,2°

b) AB = 92 m, α = 42,9°, β = 113,4°

c) AB = 135 m, α = 36,9°, γ = 95,3°

d) AB = 64 m, β = 81,4°, γ = 21,3°

19. Ein alter Turm steht in einer Ebene. Um seine Höhe zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine horizontale Standlinie AB ab, so dass A, B und der Fußpunkt des Turms in einer Linie liegen. Von A aus misst man zur Turmspitze den Höhenwinkel α, von B aus den Höhenwinkel β.



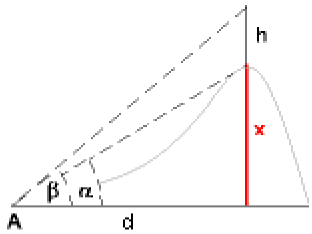
Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist sein Fußpunkt von B entfernt?

a) AB = 100 m, α = 15,8°, β = 38,1°

b) AB = 80 m, α = 16,9°, β = 25,3°

c) AB = 120 m, α = 11,8°, β = 18,6°

20. Auf einem Berggipfel steht ein h m hoher Sendemast. Von einem Ort A im Tal sieht man den Fußpunkt des Mastes unter dem Höhenwinkel α , die Spitze unter dem Höhenwinkel β. Wie hoch ist der Berg? Berechne auch die horizontale Distanz d zwischen A und dem Berggipfel.

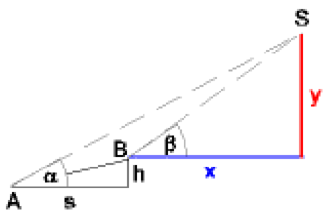


a) h = 75 m, α = 17,7°, β = 24,3°

b) h = 50 m, α = 41,6°, β = 47,3°

c) h = 40 m, α = 31,0°, β = 34,2°

21. Ein Kirchturm wird von zwei Punkten A und B aus vermessen. B liegt zwischen A und dem Turm, aber um h Meter höher als A. Man misst die horizontale Distanz s m von A und B sowie die Höhenwinkel α und β zur Turmspitze.



Berechne den Höhenunterschied und die horizontale Entfernung zwischen B und der Turmspitze.

a) s = 80 m, h = 4,7 m, α = 11,4°, β = 16,3°

b) s = 114,3 m, h = 8,5 m, α = 10,2°, β = 19,7°

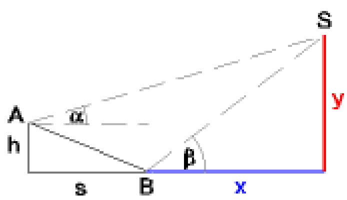
c) s = 55 m, h = 2 m, α = 16,5°, β = 23,9°

22. Wie Beispiel 21, aber b liegt um h Meter tiefer als A:

a) s = 75 m, h = 3,5 m, α = 7,8°, β = 13,3°

b) s = 62,5 m, h = 1,8 m, α = 14,0°, β = 31,7°

c) s = 240 m, h = 12 m, α = 7,7°, β = 12,1°

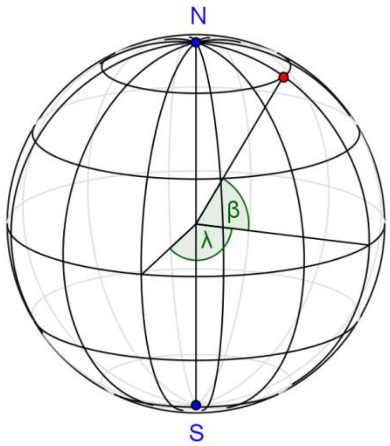


Weitere Anwendungen

23. Ein Ruderer will einen Fluss überqueren, der mit einer Geschwindigkelt von 3 km/h fließt. Das Boot erreicht eine Eigengeschwindigkeit von 10 km/h.
    a) In welchem Winkel wird das Boot abgetrieben, wenn es einen Kurs normal zum Flussufer steuert? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich?
    b) Welchen Winkel zur Normalen muss der Ruderer einschlagen, wenn er genau gegenüber von seinem Startpunkt landen will? Wie groß ist dann seine Geschwindigkeit?

24. Das Objektiv einer Kamera hat einen Öffnungswinkel von 40°.
    a) Wie breit darf eine Hausfassade maximal sein, damit du sie aus 50 m Entfernung vollständig fotografieren kannst?
    b) Aus welchem Abstand musst du einen 1,80 m gro0en Menschen aufnehmen, damit er ganz aufs Bild passt?
    c) Gib eine Formel für die Größe eines abgebildeten Objekts abhängig von Öffnungswinkel α und der Entfernung s an.

25. Der Radius der Erde beträgt ca. 6370 km. Wien liegt auf 48,2° geografischer Breite.
    a) Berechne den Abstand von Wien zum Äquator, entlang des Längenkreises gemessen.
    b) Gib eine Formel für den Umfang des Breitenkreises durch Wien an und berechne seine Länge.

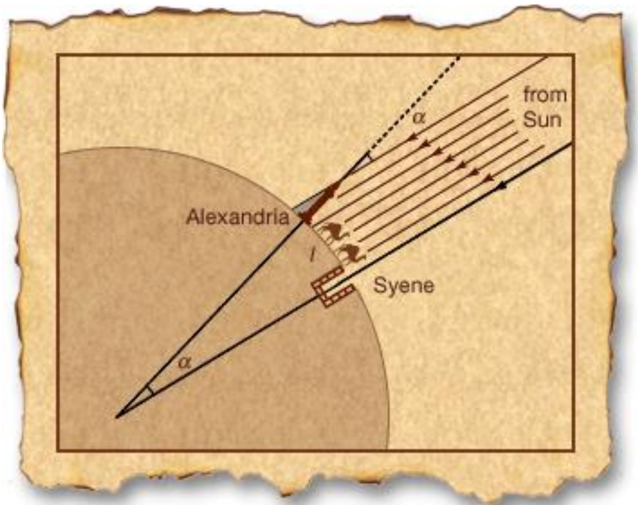


26. Eine 20 kg schwere Verkehrsampel (Gewichtskraft 200 N) hängt an zwei Drähten, die mit der Horizontalen einen Winkel von 11° einschließen. Welche Kraft wirkt auf die Drähte?

27. Der griechische Mathematiker Eratosthenes von Kyrene (3. Jh. v. Chr.) berechnete den Erdumfang auf folgende Weise:
Es war bekannt, dass in Syene (das heutige Assuan) die Sonne zur Sommersonnenwende im Zenit steht (d.h. senkrecht über dem Beobachter). In Alexandria wirft an diesem Tag ein 8 Ellen hoher, senkrechter Stab einen 1 Elle langen Schatten. Syene liegt 5000 Stadien südlich von Alexandria auf demselben Längenkreis. (Stadion: antikes Längenmaß, ca. 160 m)

a) Berechne den Winkel zwischen Zenitrichtung und Sonnenstrahlen in Alexandria.

b) Erkläre, wie man aus diesen Angaben den Erdumfang ermitteln kann, und berechnen Sie seine Länge. (Rechne mit $\alpha = 7{,}2°$.)



28. Aristarch von Samos (ebenfalls 3. Jh. v. Chr.) stellte fest, dass bei Halbmond Erde, Mond und Sonne ein rechtwinkeliges Dreieck bilden. Für den Winkel zwischen Sonne und Mond, von der Erde aus gemessen, erhielt er 87°.

a) Berechne, welches Verhältnis zwischen Mond- und Sonnenentfernung Aristarch aus diesen Angaben erhielt. (Er schloss daraus, dass die Sonne größer als die Erde ist und daher die Erde um die Sonne kreist statt umgekehrt.)

b) Wiederhole die Berechnung mit dem genaueren Wert 89,85°.

Ergebnisse:

1. 73,6 m
2. 1,3 m
3. 80,8 m
4. 8 m
5. a) $s = \frac{137}{\tan(\varphi)}$ b) 351 m
6. 4,6 m
7. ca. 1980 m
8. 33,7°
9. 55,15°
10. 11,8°
11.

	a	b	c	α	β
a)	3	4	5	36,87°	53,13°
b)	7,5	7,5	10,61	45°	45°
c)	3,24	6,75	7,49	25,64°	64,36°
d)	15,3	12,7	19,88	50,31°	39,69°
e)	8,46	6,18	10,48	53,85°	36,15°
f)	25,41	33,9	42,37	36,85°	53,15°
g)	78,17	17,86	80,18	77,13°	12,87°
h)	20	21	29	43,60°	46,40°
i)	2,33	8,67	8,98	15,04°	74,96°
j)	41,28	63,04	75,35	33,22°	56,78°
k)	183,20	225,00	290,15	39,15°	50,68°
l)	365	291	466,8	51,44°	38,56°
m)	77,11	52,19	93,11	55,91°	34,09°
n)	236,7	83,8	251,1	70,50°	19,50°
o)	57,74	34,50	67,26	59,14°	30,88°
p)	19,38	7,61	20,82	68,56°	21,44°
q)	24,13	97,33	100,28	13,92°	76,08°
r)	55,23	57,71	79,88	43,74°	46,26°
s)	1,37	5,08	5,26	15,09°	74,91°
t)	14,17	5,35	15,15	69,32°	20,68°

12. d = 37,7; 21,8°, 68,2°

13. α = 58,7°, γ = 62,7°, h = 42,7

14. e = 23,4, f = 8,8

15. a) 54,74° b) 35,26° c) 70,53°

16. a) 51,96° b) 42,11° c) $2{,}6\cdot 10^6$ m³

17.

a) eingeschrieben: a = 5,88 cm, u = 29,39 cm, A = 59,44 cm²

umschrieben: a = 7,27 cm, u = 36,33 cm, A = 90,82 cm²

b) eingeschrieben: a = 3,83 cm, u = 30,61 cm, A = 70,71 cm²

umschrieben: a = 4,14 cm, u = 33,14 cm, A = 82,84 cm²

c) eingeschrieben: $u = 2n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n}$

umschrieben: $u = 2n \cdot r \cdot \tan\frac{180°}{n}$

Wenn n größer wird, nähert sich der Umfang immer mehr dem Kreisumfang $u = 2r\pi$ an.

18. a) 49,3 m b) 143,0 m c) 60,2 m d) 169,9 m

19. a) x = 56,5 m, y = 44,3 m b) x = 143,9 m , y = 68,0 m c) x = 196,4 m, y = 66,1 m

20. a) x = 180,8 m, d = 566,6 m b) x = 226,7 m, d = 255,3 m c) x = 305,2 m, d = 508,0 m

21. a) x = 125,9 m, y = 36,8 m b) x = 67,7 m, y = 24,3 m c) x = 97,3 m, y = 43,1 m

22. a) x = 138,6 m, y = 32,8 m b) x = 47,2 m, y = 28,2 m c) x = 561,4 m, y = 120,4 m

23. a) 16,7°, 10,4 km/h b) 17,5°, 9,5 km/h

24. a) 36 m b) 2,5 m c) $b = 2s \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

25. a) ≈ 5360 km b) $u = 2r\pi \cdot \cos(\beta) \approx\ 26680\ km$

26. je 524 N

27.

a) α = 7,125°

b) Der Erdumfang verhält sich zu 5000 so wie 360° zu α

⇒ u = 250000 Stadien ≈ 40000 km

28. a) ca. 1 : 19 b) ca. 1 : 380