

Trigonometrie (Allgemeine Dreiecke)

1. Wenn eine Lehrerin ein "allgemeines Dreieck" skizzieren soll, zeichnet sie ein Dreieck mit den Winkeln 45° , 60° und 75° . Angenommen, die längste Seite eines solchen Dreiecks ist 10 cm lang. Berechne die anderen Seiten und den Flächeninhalt.
2. Auf einer Wiese stehen drei Bäume A, B und C. Man misst die Entfernungen $AC = 50$ m, $BC = 70$ m und den Winkel $\alpha = \angle BAC = 60^\circ$.
 - a) Berechne die Entfernung AB.
 - b) Angenommen, statt des Winkels α wäre $\beta = \angle ABC$ gegeben (verwende das Ergebnis aus Beispiel a). Erkläre, warum man mit diesen Angaben die Entfernung AB nicht eindeutig berechnen kann.
3. Die Entfernung zwischen Linz und Wels beträgt 25,5 km, zwischen Linz und Steyr 31,3 km (Luftlinie). Die beiden Strecken schließen einen Winkel von 68° ein. Berechne die Entfernung Wels – Steyr.
4. Ergänze die folgende Tabelle:

	a	b	c	α	β	γ
a)	7,5			$45,76^\circ$	$110,58^\circ$	
b)		8,22		$39,07^\circ$		$83,96^\circ$
c)	15,83	12,41		$75,59^\circ$		
d)	3,74	4,18			$31,72^\circ$	
e)		11,24	6,03	$15,62^\circ$		
f)	13	14	15			
g)		25,35		$56,85^\circ$	$77,75^\circ$	
h)	32,91	36,68				$76,47^\circ$
i) (2 Lsg.)	13,6		24,35	$30,28^\circ$		
j)	8,62			$28,96^\circ$		$105,21^\circ$
k)	14,1		23,5		$53,13^\circ$	
l)		65,36			$44,63^\circ$	$85,44^\circ$
m)		35,87	30,26		$69,54^\circ$	
n)	47,68	25,35	27,11			
o) (2 Lsg.)		4,42	7,04		$30,30^\circ$	
p)	17,27	14,98	10,75			
q)	11,68	18,31				$26,00^\circ$
r)	48,29	36,48	20,23			
s)	29,26			$59,93^\circ$		$86,86^\circ$
t)	6,5		7,21		$50,00^\circ$	

Vermessungsaufgaben

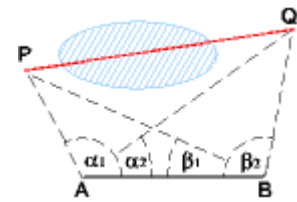
5. Um die nicht direkt messbare Entfernung zweier Punkte P und Q in der Ebene zu bestimmen, steckt man eine Standlinie AB ab und misst folgende Horizontalwinkel:

$$\angle BAP = \alpha_1, \angle BAQ = \alpha_2, \angle ABP = \beta_1, \angle ABQ = \beta_2.$$

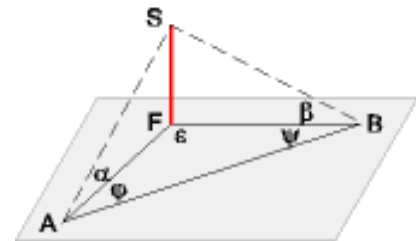
Wie lang ist die Strecke PQ?

- a) $AB = 250 \text{ m}, \alpha_1 = 102,5^\circ, \alpha_2 = 21,6^\circ, \beta_1 = 37,8^\circ, \beta_2 = 122,3^\circ$
 b) $AB = 250 \text{ m}, \alpha_1 = 75,2^\circ, \alpha_2 = 37,9^\circ, \beta_1 = 32,5^\circ, \beta_2 = 106,3^\circ$
 c) $AB = 400 \text{ m}, \alpha_1 = 87,2^\circ, \alpha_2 = 63,4^\circ, \beta_1 = 52,1^\circ, \beta_2 = 79,9^\circ$

(Diese Aufgabe bezeichnet man auch als „Vorwärtseinschneiden“.)



6. Ein Mast steht auf einer waagrecht Ebene. In der Ebene wird eine Standlinie AB abgesteckt, die mit dem Fußpunkt F des Mastes ein Dreieck bildet. Man misst die Horizontalwinkel $\angle BAF = \varphi$, $\angle ABF = \psi$ und den Höhenwinkel α von A zur Mastspitze. Wie hoch ist der Mast?



- a) $AB = 50 \text{ m}, \varphi = 62,2^\circ, \psi = 47,0^\circ, \alpha = 37,5^\circ$
 b) $AB = 80 \text{ m}, \varphi = 72,8^\circ, \psi = 38,4^\circ, \alpha = 28,3^\circ$
 c) $AB = 60 \text{ m}, \varphi = 105,3^\circ, \psi = 41,6^\circ, \alpha = 23,7^\circ$

7. Von der Spitze eines $h \text{ m}$ hohen Turmes sieht man den Geländepunkt A unter dem Tiefenwinkel α , und nach Schwenken des Messgeräts um den Horizontalwinkel ε den Geländepunkt B unter dem Tiefenwinkel β . Berechne die Entfernung AB.

- a) $h = 63,5 \text{ m}, \alpha = 24,2^\circ, \beta = 29,9^\circ, \varepsilon = 76,4^\circ$
 b) $h = 46,5 \text{ m}, \alpha = 27,5^\circ, \beta = 34,8^\circ, \varepsilon = 112,2^\circ$
 c) $h = 55 \text{ m}, \alpha = 14,0^\circ, \beta = 12,7^\circ, \varepsilon = 51,6^\circ$

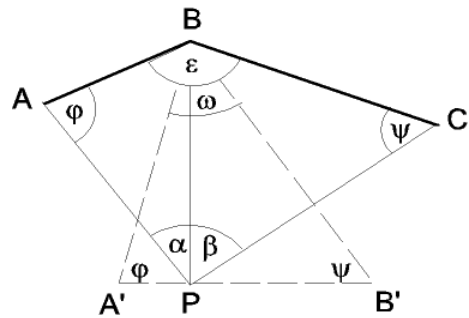
8. (*) Aus einer Karte kennt man die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C:
 $AB = 1300 \text{ m}, BC = 2500 \text{ m}, \varepsilon = \angle ABC = 142^\circ$. Von einem Schiff aus, das sich im Punkt P befindet, misst man die Horizontalwinkel $\alpha = \angle APB = 38^\circ, \beta = \angle BPC = 54^\circ$.
 Wie weit ist das Schiff von den Punkten A, B und C entfernt?
 (Diese Aufgabe ist auch als „Rückwärtseinschneiden“ bekannt.)

Anleitung: Berechne zuerst das Hilfsdreieck A'B'C: die Seite A'B' steht normal auf PB, die Winkel bei A' und B' sind $\varphi = \angle PAB$ und $\psi = \angle PCB$. Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, ist $\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \varepsilon)$ und $\omega = 180^\circ - (\varphi + \psi) = \alpha + \beta + \varepsilon - 180^\circ$. Die Seitenlängen sind

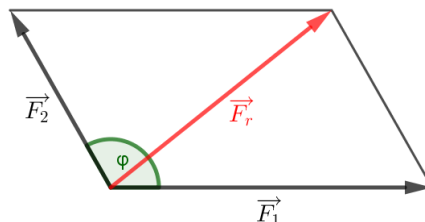
$$A'B = \frac{PB}{\sin\varphi} = \frac{AB}{\sin\alpha} \quad (\text{Sinussatz im Dreieck ABP}) \quad \text{und}$$

$$C'B = \frac{PB}{\sin\psi} = \frac{BC}{\sin\beta} \quad (\text{Sinussatz im Dreieck BCP}).$$

Wenn du φ und ψ kennst, kannst du auch die anderen Dreiecke berechnen.



9. Die Erde ist ca. 150 Mio. km von der Sonne entfernt, der Mars 228 Mio. km. An einem bestimmten Tag beträgt der Winkelabstand zwischen Sonne und Mars, von der Erde aus gesehen, 50° . Wie weit ist der Mars von der Erde entfernt?
10. Die Entfernung der Venus von der Sonne beträgt ca. 108 Mio. km.
 - a) Rechne wie im vorigen Beispiel, wenn der Winkelabstand zwischen Sonne und Venus, von der Erde aus gesehen, 30° beträgt (2 Lösungen!).
 - b) Wie groß kann der Winkelabstand Sonne – Venus höchstens sein?
11. An einem Maschinenteil greifen zwei Kräfte F_1 und F_2 an, die miteinander den Winkel φ einschließen. Berechne den Betrag der resultierenden Kraft.
 - a) $F_1 = 80 \text{ N}$, $F_2 = 50 \text{ N}$, $\varphi = 120^\circ$
 - b) $F_1 = 50 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $\varphi = 75^\circ$
 - c) $F_1 = 90 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$, $\varphi = 85^\circ$
 - d) Erkläre, wie sich das Ergebnis ändert, wenn beide Kräfte verdoppelt werden.



12. Eine Kraft von 100 N soll in zwei Teilkräfte zerlegt werden, die mit der ursprünglichen Kraftrichtung Winkel von 45° bzw. 30° einschließen. Wie groß sind die Teilkräfte?

Ergebnisse:

1. 8,97 cm, 7,32 cm, 31,70 cm²
2. a) 80 m
b) Der Winkel β liegt der kleineren der gegebenen Seiten gegenüber. Daher gibt es für α zwei Möglichkeiten (60° oder 120°).
3. 32,1 km
- 4.

	a	b	c	α	β	γ
a)	7,5	9,8	4,2	45,76°	110,58°	23,66°
b)	6,18	8,22	9,75	39,07°	56,97°	83,96°
c)	15,83	12,41	13,39	75,59°	49,40°	55,01°
d)	3,74	4,18	6,87	28,06°	31,72°	120,22°
e)	5,67	11,24	6,03	15,62°	147,74°	16,64°
f)	13	14	15	53,13°	59,49°	67,38°
g)	21,72	25,35	18,47	56,85°	77,75°	45,40°
h)	32,91	36,68	43,17	47,83°	55,70°	76,47°
i)	13,6	26,88 15,18	24,35	30,28°	85,19° 34,25°	64,53° 115,47°
j)	8,62	12,77	17,18	28,96°	45,83°	105,21°
k)	14,1	18,8	23,5	36,87°	53,13°	90°
l)	71,19	65,36	92,74	49,93°	44,63°	85,44°
m)	32,55	35,87	30,26	58,23°	69,54°	52,22°
n)	47,68	25,35	27,11	130,67°	23,78°	25,55°
o)	8,71 3,45	4,42	7,04	96,23° 23,17°	30,30°	53,47° 126,53°
p)	17,27	14,98	10,75	82,56°	59,33°	38,11°
q)	11,68	18,31	9,34	33,24°	120,76°	26,00°
r)	48,29	36,48	20,23	113,64°	43,79°	22,57°
s)	29,26	18,52	33,76	59,93°	33,21°	86,86°
t)	6,5	5,83	7,21	58,66°	50,00°	71,34°

5. a) 398,7 m b) 310,0 m c) 291,3 m
6. a) 29,7 m b) 28,7 m c) 32,0 m
7. a) 157,5 m b) 130,3 m c) 203,3 m
8. PA = 2333 m, PB = 2380 m, PC = 2801 m
9. 30,26°, 293 Mill. km, 99,74°
10. a) 1. Lösung: 44°, 208 Mill. km, 106°; 2. Lösung: 136°, 52 Mill. km, 14° b) 46°
11. a) 70 N b) 122,8 N c) 101,6 N d) Die resultierende Kraft wird verdoppelt.
12. F₁ = 51,8 N, F₂ = 73,2 N