Logarithmen

1. Berechne ohne Taschenrechner:

   $\log_2(8)$ $\log_2(32)$ $\log_3(81)$ $\log_5(125)$ $\log_{10}(1000000)$

   $\log_2(1)$ $\log_{10}(1)$ $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)$ $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ $\log_{10}(0{,}0001)$

2. Angenommen, du kennst die dekadischen Logarithmen von 2 und 3 auf 3 Dezimalstellen genau: $\lg(2) = 0{,}301, \lg(3) = 0{,}477$.
   a) Berechne mit diesen Angaben ohne Taschenrechner die Logarithmen von 4, 5, 6, 8 und 9. (Tipp: $\lg(10) = 1$)
   b) Erkläre, warum du $\lg(7)$ nicht auf diese Art berechnen kannst.

3. Zerlege in einzelne Logarithmen:
   a) $\log\left(\frac{abc}{d}\right)$
   b) $\log\left(\frac{ad}{bc}\right)$
   c) $\log\left(\frac{b}{acd}\right)$
   d) $\log(x^2 y\, z^3)$
   e) $\log\left(\frac{x^4 z}{a^2}\right)$
   f) $\log\left(\frac{2a^3}{bc^2}\right)$
   g) $\log(a \cdot \sqrt[3]{b})$
   h) $\log\left(\sqrt[4]{\frac{p^3}{q}}\right)$

4. Fasse zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen:
   a) $2\log(x) + 3\log(y)$
   b) $\log(a) - 4\log(b) + 2\log(c)$
   c) $\log(1-x) + \log(1+x) - 2\log(x)$
   d) $\log(a+b) - \log(a-b) + 3\log(2)$
   e) $3(\log(x) + \log(y) - 2\log(z))$
   f) $2(3\log(x) + \log(5)) - 5\log(y)$
   g) $\frac{1}{4}\log(x) + 3\log(z)$
   h) $5\log(a) - \frac{1}{2}\log(b)$

5. Löse die folgenden Exponentialgleichungen:
   a) $3^x = 10$
   b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 23$
   c) $3^{x-1} = 5$
   d) $5^{2x-1} = 12$
   e) $3 \cdot 4^x = 1{,}8$
   f) $5 \cdot 3^x + 2 = 72$
   g) $4^x - 18 = 7$
   h) $0{,}25^x + 0{,}8 = 2{,}3$
   i) $3 \cdot 10^x = 47$
   j) $10^{3x-2} = 117$
   k) $15 \cdot e^{2x} = 66$
   l) $1 - e^{5x} = 0{,}3$

6. **Lautstärke**

Die Lautstärke wird meistens in Dezibel (dB) angegeben. Es gilt:

$$L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

L: Lautstärke (Schallintensitätspegel) in Dezibel

I: Schallintensität in W/m²

$I_0 = 10^{-12}$ W/m²: Schallintensität eines Geräuschs, das gerade noch wahrgenommen werden kann

a) Zeige, dass die Lautstärke um ca. 3 dB zunimmt, wenn die Schallintensität verdoppelt wird.

b) Ein Pkw, der in 10 m Entfernung vorbeifährt, erzeugt eine Lautstärke von ca. 70 dB. Berechne die Schallintensität.

7. **Helligkeit von Sternen**

Der griechische Astronom Hipparch (ca. 190 - 120 v. Chr.) teilte die Sterne nach ihrer scheinbaren Helligkeit in 6 Größenklassen ein (1. Größe: hellste Sterne, 6. Größe: schwächste Sterne). Heute wird die Größenklasse durch die folgende Formel definiert:

$$m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \cdot \log_{10}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)$$

(m: Größenklasse (magnitude), Φ: Lichtintensität)

a) Zeige, dass ein Stern 1. Größe 100 mal so hell ist wie ein Stern 6. Größe.

b) Berechne, um das Wievielfache ein Stern heller ist als ein anderer, wenn sich die Größenklassen um 1 unterscheiden.

8. **pH-Wert**

Der pH-Wert einer Lösung ist den negative dekadische Logarithmus der Wasserstoff-(H^{+-})Ionenkonzentration.

Beispiel: In reinem Wasser kommt auf 10^7 Wassermoleküle ein H^+-Ion. Die H^+-Ionenkonzentration beträgt daher 10^{-7} und der pH-Wert 7.

Lösungen mit einem pH-Wert von unter 7 nennt man sauer, mit einem pH-Wert von über 7 basisch.

a) Wein hat einen pH-Wert von 4. Erkläre, um das Wievielfache die H^+-Ionenkonzentration größer ist als in Wasser.

b) Im menschlichen Blut kommt ein H^+-Ion auf 25 Millionen Wassermoleküle. Berechne den pH-Wert.

c) Gib an, ob Blut sauer oder basisch ist.

Ergebnisse:

1. 3, 5, 4, 3, 6, 0, 0, –1, –3, –4
2.
   a) $\lg(4) = 0{,}602,\ \lg(5) = 0{,}699,\ \lg(6) = 0{,}778,\ \lg(8) = 0{,}903,\ \lg(9) = 0{,}954$
   b) 7 ist eine Primzahl.
3.
   a) $\log(a) + \log(b) + \log(c) - \log(d)$
   b) $\log(a) + \log(d) - \log(b) - \log(c)$
   c) $\log(b) - \log(a) - \log(c) - \log(d)$
   d) $2\log(x) + \log(y) + 3\log(z)$
   e) $4\log(x) + \log(z) - 2\log(a)$
   f) $\log(2) + 3\log(a) - \log(b) - 2\log(c)$
   g) $\log(a) + \frac{1}{3}\log(b)$
   h) $\frac{1}{4}(3\log(p) - \log(q))$
4.
   a) $\log(x^2y^3)$
   b) $\log\left(\frac{ac^2}{b^4}\right)$
   c) $\log\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$
   d) $\log\left(\frac{8(a+b)}{a-b}\right)$
   e) $\log\left(\frac{xy}{z^2}\right)^3$
   f) $\log\left(\frac{(5x^3)^2}{y^5}\right)$
   g) $\log(\sqrt[4]{x}\cdot z^3)$
   h) $\log\left(\frac{a^5}{\sqrt{b}}\right)$
5.
   a) 2,096
   b) -4,524
   c) 2,465
   d) 1,272
   e) -0,368
   f) 0,428
   g) 2,322
   h) -0,292
   i) 1,195
   j) 1,356
   k) 0,741
   l) -0,071
6.
   a) L nimmt um $10 \cdot \log_{10}(2) \approx 3$ zu.
   b) 10^{-5} W/m²
7.
   a) $6 - 1 = \frac{5}{2}\cdot\log_{10}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)$ ergibt $\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 100$.
   b) ca. um das 2,5-Fache
8.
   a) Um das 1000-Fache, weil 10^{-4} 1000 mal so groß ist wie 10^{-7}.
   b) 7,4
   c) basisch