Folgen und Reihen

Eigenschaften von Folgen

1. Berechne die ersten fünf Glieder der angegebenen Folgen und untersuche, ob sie monoton sind:
   a) $a_n = 5n - 3$
   b) $b_n = 20 - 2n$
   c) $c_n = 6n - n^2$
   d) $d_n = n^3 - n^2$
   e) $e_n = \frac{1}{2^n}$
   f) $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   g) $g_n = \frac{3n+1}{2n}$
   h) $h_n = \frac{1}{n^2+1}$
2. Untersuche, ob die Folgen aus Beispiel 1 beschränkt sind. Gib, wenn möglich, je eine obere und untere Schranke an.
3. Untersuche, ob die Folgen aus Beispiel 1 konvergent sind. Wenn ja, gib den Grenzwert an.

Arithmetische und geometrische Folgen

4. Argumentiere, ob es sich bei den angegebenen Folgen um eine arithmetische, eine geometrische Folge oder um keines von beiden handelt.
   a) (6, 60, 600, 6000)
   b) $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$
   c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$
   d) (8, 12, 18, 27)
   e) (1, 8, 27, 64, 125)
   f) (*) $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$
   g) (*) (a^3, a^2b, ab^2, b^3)
5. Setze die angegebene Folge so fort, dass sich (i) eine arithmetische Folge, (ii) eine geometrische Folge ergibt. Gib je drei weitere Folgenglieder an.
   a) (3, 6, ...)
   b) (5, 20, ...)
   c) (80, 40, ...)
   d) (10, 2, ...)
   e) (–1, 3, ...)

6. Ein Sportler bereitet sich auf einen Marathonlauf vor. Am ersten Tag läuft er 5 km. Er hat vor, drei Wochen lang seine Leistung täglich um 500 m zu steigern.
   a) Erstelle je eine rekursive und explizite Formel für die Strecke s(n), die er am n-ten Tag zurücklegt, in km.
   b) Berechne, wie weit er am 21. Tag läuft.
   c) (*) Welche Strecke legt er in den drei Wochen insgesamt zurück?

7. Bei einem Wettbewerb werden 10 Preise vergeben. Der 1. Preis beträgt 1500 €, jeder weitere Preisträger erhält um 100 € weniger als der vorige.
   a) Gib eine rekursive und explizite Formel für die Höhe p(n) des n-ten Preises an.
   b) Wie hoch ist der 10. Preis?
   c) (*) Berechne die Summe aller Preise.

8. Eine Leiter hat 9 Sprossen in gleichmäßigen Abständen. Die erste Sprosse ist 30 cm hoch, die letzte 2,10 m.
   a) Gib eine Formel für die Höhe h(n) der n-ten Sprosse in expliziter Form an.
   b) Berechne die Höhe aller Sprossen.

9. Eine Maschine hat einen Neuwert von 60000 €. Nach 5 Jahren beträgt der Wert bei linearer Abschreibung (d.h. jedes Jahr wird derselbe Betrag abgeschrieben) nur noch 35000 €.
   a) Gib eine Formel für den Restwert r(n) nach n Jahren an. (Der Neuwert ist r(0).)
   b) Gib den Wert nach 1, 2, 3, 4 Jahren an.
   c) Nach wieviel Jahren ist die Maschine ganz abgeschrieben?

10. Ein Kind baut einen Turm aus 8 Plastikwürfeln. Die Seitenlänge des 1. Würfels beträgt 12 cm, jeder weitere hat die 0,8-fache Seitenlänge des vorigen.
   a) Erstelle eine Formel für die Seitenlänge s(n) des n-ten Würfels in rekursiver und expliziter Form. Welche Seitenlänge hat der 8. Würfel?
   b) Gib eine Formel für das Volumen v(n) des n-ten Würfels an und berechne das Volumen des 8. Würfels.
   c) (*) Ermittle die Höhe des Turmes. Wie hoch kann er höchstens werden, wenn die Anzahl der Würfel beliebig groß wird?
   d) (*) Berechne die Summe der Volumina aller 8 Würfel.

11. Sterne werden nach ihrer scheinbaren Helligkeit in Größenklassen eingeteilt, die eine geometrische Folge bilden. Ein Stern 1. Größe ist dabei 100mal so hell wie ein Stern 6. Größe.

a) Gib eine Formel für die Helligkeit h(n) eines Sterns n-ter Größe an. Setze dabei h(1) = 100 %.

b) Erstelle eine Tabelle für die Helligkeiten von Sternen 1. bis 6. Größe.

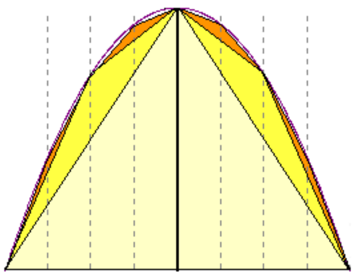
12. Wenn die Frequenz eines Tons verdoppelt wird, klingt er um eine Oktav höher. Bei der gleichschwebend-temperierten Stimmung von Musikinstrumenten wird eine Oktav in 12 Halbtöne eingeteilt, deren Frequenzen eine geometrische Folge bilden. Die Frequenz wird in Hertz (Hz) angegeben.

a) Erkläre, warum für die Frequenzen aufeinanderfolgender Halbtöne folgende Formel gilt:

$$f(n+1) = f(n) \cdot \sqrt[12]{2}$$

b) Berechne die Frequenzen aller Halbtöne zwischen a' (440 Hz) und a'' (880 Hz).

13. (*) Archimedes berechnete den Flächeninhalt des Parabelsegments folgendermaßen (Bild):



Er schrieb dem Segment das größte Dreieck ein. Den Restsegmenten schrieb er wieder Dreiecke ein und zeigte, dass diese zusammen 1/4 der Fläche des ersten Dreiecks besitzen. Dieser Vorgang lässt sich beliebig oft wiederholen, wobei die Restfläche gegen 0 geht.

Wenn das erste Dreieck den Flächeninhalt A besitzt, wie groß ist dann die Fläche des Parabelsegments?

Ergebnisse:

1.

a) (2, 7, 12, 17, 22); wachsend
b) (18, 16, 14, 12, 10); fallend
c) (5, 8, 9, 8, 5); nicht monoton
d) (0, 4, 18, 48, 100); wachsend
e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$; fallend
f) $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right)$; nicht mon.
g) $\left(\frac{4}{2}, \frac{7}{4}, \frac{10}{6}, \frac{13}{8}, \frac{16}{9}\right)$; fallend
h) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}\right)$; fallend

2. Hier sind mehrere Antworten möglich; ich habe jeweils die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke angegeben.

a) $s_u = 2$, nach oben unbeschränkt
b) $s_o = 18$, nach unten unbeschränkt
c) $s_o = 9$, nach unten unbeschränkt
d) $s_u = 0$, nach oben unbeschränkt
e) $s_o = \frac{1}{2}$, $s_u = 0$
f) $s_o = \frac{1}{2}$, $s_u = -1$
g) $s_o = 2$, $s_u = \frac{3}{2}$
h) $s_o = \frac{1}{2}$, $s_u = 0$

3.

a) divergent
b) divergent
c) divergent
d) divergent
e) Grenzwert: 0
f) Grenzwert: 0
g) Grenzwert: 1,5
h) Grenzwert: 0

4.

a) geometrisch, q = 10
b) arithmetisch, $\mathrm{k} = \frac{2}{4}$
c) weder noch
d) geometrisch, q = 1,5
e) weder noch
f) arithmetisch, k = 2y
g) geometrisch, $\mathrm{q} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$

5.

a) (i) (3, 6, 9, 12, 15) (ii) (3, 6, 12, 24, 48)
b) (i) (5, 20, 35, 50, 65) (ii) (5, 20, 80, 320, 1280)
c) (i) (80, 40, 0, –40, –80) (ii) (80, 40, 20, 10, 5)
d) (i) (10, 2, –6, –14, –22) (ii) (10, 2, 0,4, 0,08, 0,016)
e) (i) (–1, 3, 7, 11, 15) (ii) (–1, 3, –9, 27, –81)

6.

a) rekursiv: s(n+1) = s(n) + 0,5, s(1) = 5 explizit: s(n) = 5 + 0,5·(n – 1)

b) 15 km

c) 210 km

7.

a) rekursiv: p(n+1) = p(n) – 100, p(1) = 1500

explizit: p(n) = 1500 – 100·(n – 1)

b) 600 €

c) 10500 €

8.

a) h(n) = 30 + 22,5·(n – 1) (in cm)

b) (30; 52,5; 75; 97,5; 120; 142,5; 165; 187,5; 210)

9.

a) r(n) = 60000 – 5000·n

b) r(1) =55000, r(2) = 50000, r(3) = 45000, r(4) = 40000

c) nach 12 Jahren

10.

a) rekursiv: s(n+1) = 0,8·s(n), s(1) = 12 cm

explizit: $s(n) = 12 \cdot 0{,}8^{n-1}$

s(8) = 2,52 cm

b) rekursiv: v(n+1) = 0,512·v(n), v(1) = 1728 cm³

explizit: $\mathrm{v}(n) = 1728 \cdot 0{,}512^{n-1}$

v(8) = 15,94 cm³

c) 49,93 cm; höchstens 60 cm

d) 3524,26 cm³

11.

a) $h(n) = 100\,\% \cdot 0{,}4^{n-1}$

b) (100 %, 40 %, 16 %, 6,3 %, 2,5 %, 1 %)

12.

a) Aus der Gleichung $880 = 440 \cdot q^{12} = 2 \cdot f(0)$ folgt $q = \sqrt[12]{2}$.

Oder: Da nach 12 Halbtonschritten die Frequenz verdoppelt wird, entspricht ein Schritt einer Multiplikation mit $\sqrt[12]{2}$.

b) (440; 466; 494; 523; 554; 587; 622; 659; 698; 740; 784; 830; 880)

13. $\frac{4}{3} \cdot A$