Übungen: Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse

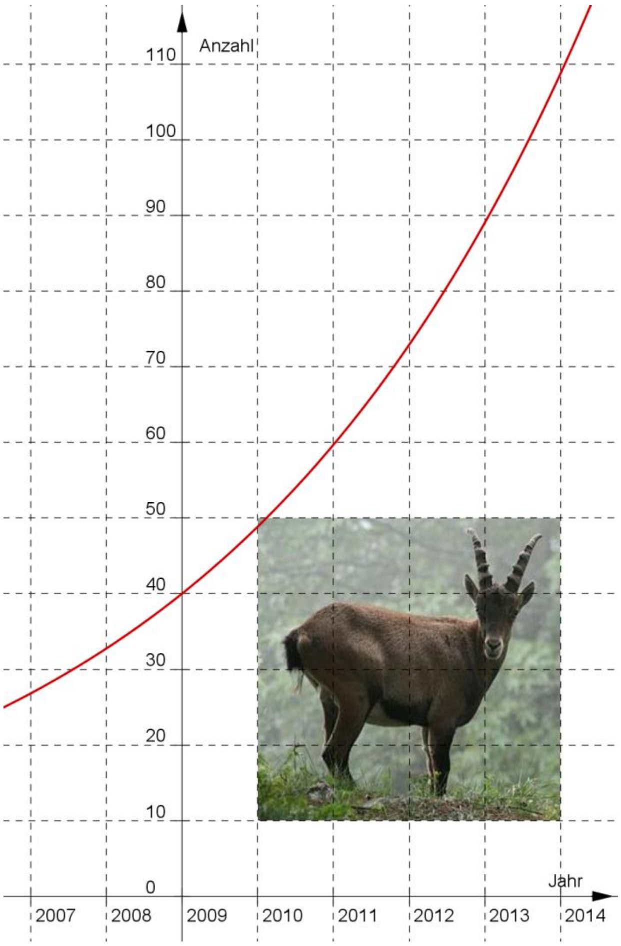
1. Ein Kapital von 1000 € wird mit 3 % Zinsen angelegt.
   a) Stelle eine Funktion auf, die die Höhe des Kapitals nach t Jahren angibt.
   b) Berechne den Kontostand nach 10 Jahren.
   c) In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
   d) Zeige, dass die Verdopplungszeit nicht vom Anfangskapital abhängt.
   e) Überprüfe, ob die folgenden Aussagen (zumindest näherungsweise) richtig sind:
      i. Wenn der Zinssatz verdoppelt wird, erhält man doppelt so viel Zinsen. ☐ r ☐ f
      ii. Wenn die Laufzeit verdoppelt wird, erhält man doppelt so viel Zinsen. ☐ r ☐ f
      iii. Wenn der Zinssatz verdoppelt wird, dauert es nur halb so lang, bis das Kapital auf den doppelten Wert anwächst. ☐ r ☐ f

2. In einer Stadt waren im Jahr 2000 ca. 7200 PKW zugelassen, im Jahr 2010 ca. 11700. Wir nehmen an, dass die Anzahl der PKW exponentiell zunimmt.
   a) Zeige, dass die Anzahl pro Jahr um ca. 5 % zunimmt.
   b) Modelliere eine Funktion N(t), die die Anzahl der PKW nach t Jahren angibt (ausgehend vom Jahr 2000).
   c) Berechne, wann es nach diesem Modell 18000 PKW in der Stadt geben wird.
   Erkläre, ob dieser Wert früher oder später als bei linearer Zunahme erreicht wird.

3. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%. Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
   a) Gib eine Funktion an, die das Wachstum der Bevölkerung beschreibt. Erkläre, um welches Modell es sich dabei handelt.
   b) Wie groß wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?
   c) Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
   d) Der Bevölkerungszuwachs lässt sich durch die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ beschreiben. Berechne die Konstante λ!

4. Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$.
   1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.
   a) Bestimme die Konstante λ und stelle die Wachstumsfunktion auf.
   b) Wie viel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
   c) Berechne, in welcher Zeit sich die Weltbevölkerung verdoppelt.
   d) Argumentiere, ob das gewählte Wachstumsmodell auf lange Sicht realistisch ist.

5. Auf der Hohen Wand, einem Berg im Süden von Niederösterreich (1132 m), sind im Jahr 2003 einige Steinböcke aus einem Wildgehege ausgekommen. Inzwischen haben sie sich stark vermehrt. Die Grafik zeigt die (geschätzte) Entwicklung der Anzahl der Steinböcke. Lies aus dem Graphen folgende Informationen ab:
   a) Wie viele Steinböcke lebten 2009 bzw. 2011 auf der Hohen Wand?
   b) Um wie viel Prozent nimmt ihre Anzahl pro Jahr zu?
   c) Wann wird es 110 Steinböcke geben?
   d) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl der Steinböcke?

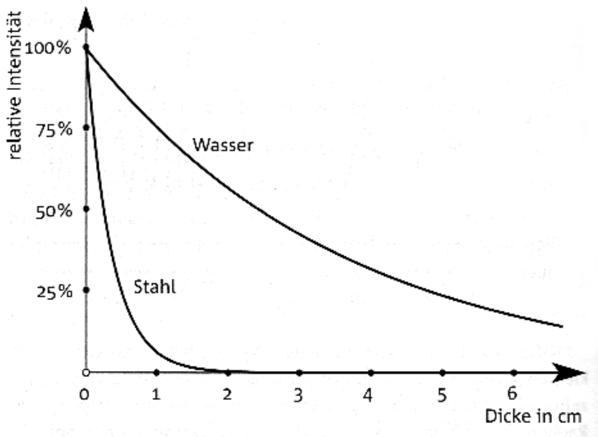


6. Im 19. Jahrhundert benutzte man in Australien Kamele für den Lastentransport. In den 1920er Jahren wurden sie freigelassen und haben sich seitdem stark vermehrt. 2009 wurde die Kamelpopulation auf rund 1 Million Tiere geschätzt. Wenn sie sich ungehindert weiter vermehren, wird sich ihre Anzahl alle 8 Jahre verdoppeln.
   a) Stelle eine Funktion auf, die das Wachstum der Kamelpopulation beschreibt (unter der Annahme eine Verdopplung in 8 Jahren).
   b) Ermittle die jährliche Zunahme in Prozent.
   c) Schätze, wie viele Kamele zwischen 1920 und 1930 freigelassen wurden. Erkläre den Unterschied zur tatsächlichen Anzahl von ca. 20000.

7. Herr Adam und Frau Eva arbeiten in derselben Firma und beginnen beide mit einem Jahresgehalt von 15000 €. Sie entscheiden sich für verschiedene Gehaltsmodelle:
   Das Gehalt von Herrn Adam steigt jedes Jahr um 500 €, das von Frau Eva nimmt jährlich um 3% zu.
   a) Erstelle eine Funktion für beide Jahresgehälter nach t Jahren.
   b) Wann verdient Frau Eva zum ersten Mal mehr als Herr Adam?
   c) Begründe, für welches Gehaltsmodell du dich entscheiden würdest.

8. Eine kochend heiße Flüssigkeit (100 °C) wird zum Abkühlen bei 0 °C Außentemperatur ins Freie gestellt. Die Temperatur nimmt pro Minute um 15 % ab.
   a) Stelle eine Funktion auf, die die Abnahme der Temperatur beschreibt.
   b) Berechne die Temperatur der Flüssigkeit nach 5 min bzw. 10 min.
   c) Wann wird die Temperatur
      - 10 °C,
      - 5 °C,
      - 0 °C betragen?

9. Die nebenstehende Grafik zeigt die Abschwächung von Röntgenstrahlen beim Durchgang durch Wasser bzw. Stahl (aus: Tolan M., Geschüttelt, nicht gerührt, München 2010):



   a) Erkläre, um welche Art von Abnahme es sich dabei handelt.
   b) Lies die Intensität nach dem Durchgang durch eine 0,5 cm dicke Stahlschicht ab. Wie dick müsste eine Isolierung aus Wasser sein, um die gleiche Wirkung zu erreichen?
   c) Lies außerdem ab, bei welcher Wasserdicke die Intensität um ein Viertel abnimmt. Wie viel Strahlung durchdringt eine ebenso dicke Stahlschicht?

10. Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben (N_0 = Anfangswert). Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1620 Jahre.
   a) Gib die Zerfallsfunktion für Radium an.
   b) Ermittle, wie viel von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, nach 100 Jahren noch übrig war.
   c) Wann wird nur mehr 0,1 g vorhanden sein?

11. Das Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren. Mit seiner Hilfe lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen.
   a) Berechne die Zerfallskonstante λ!
   b) In einem Fossil wurde ein ^{14}C-Gehalt von 7,5% der ursprünglichen Menge gemessen. Ermittle das Alter des Fossils (runden Sie auf 1000 Jahre).
   c) Bis zu welchem Alter lässt sich die ^{14}C-Methode anwenden, wenn man noch 0,1% des ursprünglichen Gehalts mit hinreichender Genauigkeit messen kann?

12. Aspirintabletten enthalten den Wirkstoff Acetylsalicylsäure (ASS). Von diesem Stoff wird pro Stunde ca. 20 % aus dem Körper ausgeschieden.
    a) Modelliere die Abnahme des Wirkstoffs durch eine Exponentialfunktion.
    b) Berechne die biologische Halbwertszeit von ASS.
    c) (*) Frau Körner nimmt um 6 h, 12 h und 18 h je eine Tablette mit 400 mg ASS. Welche Menge des Wirkstoffs befindet sich direkt danach in ihrem Körper?

13. Anna trinkt eine Dose „Red Bull" – darin sind 80 mg Koffein enthalten. Nach 3 Stunden sind davon noch 50 mg übrig. Koffein wird im Körper exponentiell abgebaut.
    a) Erstelle eine Funktion, die die Koffeinmenge in Annas Körper abhängig von der Zeit angibt.
    b) Gib an, wieviel Prozent des Koffeins pro Stunde abgebaut wird.
    c) Ermittle die biologische Halbwertszeit von Koffein.

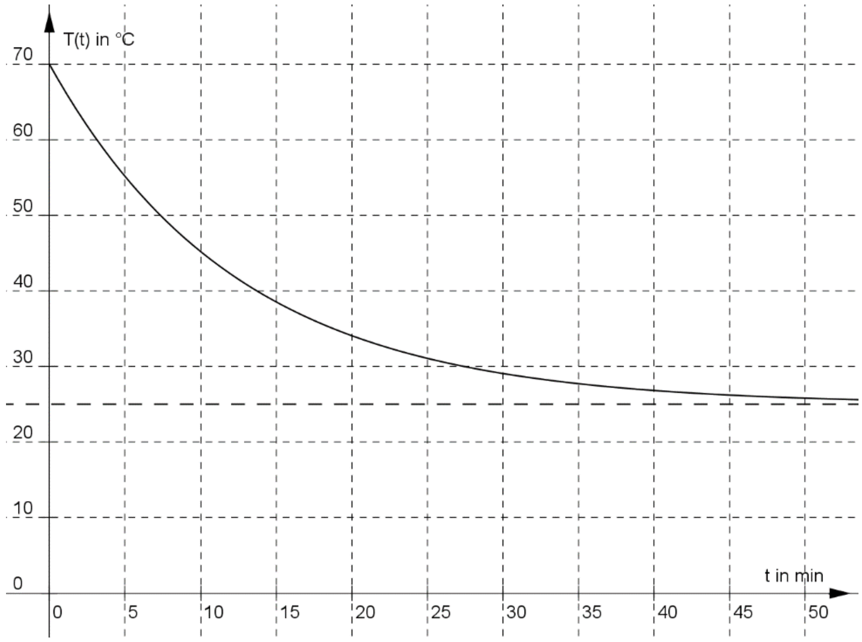
14. Lisa und Niko waren auf einer wilden Party.
    a) Lisa hat danach 2,3 Promille (‰) Alkohol im Blut. Dieser Wert nimmt pro Stunde um 0,15 Promillepunkte ab. (Die Promille-Angaben beziehen sich auf die gesamte Körperflüssigkeit - die stündlich abgebaute Menge ist annähernd konstant!)
        - Erstelle eine Funktion, die die Blutalkoholkonzentration nach t Stunden angibt.
        - Berechne, wann Lisa wieder Auto fahren darf (BAK höchstens 0,5 ‰).
    b) Der Konsum von Drogen (Cannabis) kann durch den THC-Wert nachgewiesen werden. Niko hat gekifft und weist einen THC-Wert von 100 auf. Pro Tag nimmt dieser Wert um 10 % ab. Einfache Drogentests können einen THC-Wert ab 50 erkennen.
        - gib den THC-Wert nach t Tagen als Funktion an.
        - Nach wie vielen Tagen wird Niko nach einem Drogentest nicht mehr auffällig?
    c) Erkläre die wesentlichen Unterschiede der beiden Abnahmeprozesse.

15. Die unterste Schicht der Erdatmosphäre bis ca. 11 km Höhe bezeichnet man als Troposphäre. Die internationale Zivilluftfahrtsorganisation ICAO verwendet ein vereinfachtes Atmosphärenmodell, die sogenannte Standardatmosphäre.
    a) Die durchschnittliche Temperatur beträgt auf Meeresniveau 15 °C und nimmt pro km um 6,5 °C ab.
        - Gib eine Funktion an, die die Temperatur (T) in der Höhe h (in km) beschreibt.
    b) Der Luftdruck nimmt bei einem Höhenunterschied von jeweils 5,5 km um die Hälfte ab. Auf Meeresniveau beträgt er durchschnittlich 1013 Hektopascal (hPa).
        - Stelle den Luftdruck (p) als Funktion der Höhe (h) dar.
        - Berechne die prozentuelle Abnahme des Luftdrucks bei 1000 m Höhenunterschied.

16. Prof. Euler will sein jüngstes Kind baden. Er hat das Badezimmer auf 25° C vorgeheizt. Leider ist das Badewasser zu heiß geworden, es hat jetzt eine Temperatur von 70 °C. Die Abkühlung kann durch die Funktion T beschrieben werden:

$$T(t) = 25 + 45 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$$

(T(t): Wassertemperatur, t: Zeit in Minuten).



a) Erkläre anhand der Funktionsgleichung, warum die Temperatur nicht unter 25 °C fallen kann.

b) Lies aus dem Graphen ab, wie lange wird es dauern wird, bis das Wasser auf Badetemperatur (37° C) abgekühlt ist. Kontrolliere das Ergebnis durch eine Rechnung.

c) Zeichne im Diagramm den Graphen eines Abkühlvorgangs ein
   - mit niedrigerer Ausgangstemperatur;
   - mit niedrigerer Umgebungstemperatur.

d) Anstatt zu warten, bis das Wasser abkühlt, könnte man es auch mit kaltem Wasser (15 °C) mischen. Es werden 15 L Wasser mit einer Temperatur von 37 °C gebraucht.
   - Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der benötigten Mengen von heißem und kaltem Wasser.
   - Berechne, wie viel heißes und kaltes Wasser gemischt werden müssen.

17. Eine Glaskugel fällt ins Wasser und wird vom Strömungswiderstand abgebremst. Ihre Geschwindigkeit abhängig von der Zeit kann durch die folgende Funktion modelliert werden:

$$v(t) = 0{,}4 \cdot (1 - e^{-15 \cdot t})$$

(v(t): Geschwindigkeit in m/s, t: Zeit in Sekunden)

a) Skizziere den Verlauf der Geschwindigkeit im Intervall [0; 1].

b) Berechne die Geschwindigkeit nach 0,1 s und die durchschnittliche Beschleunigung in der ersten Zehntelsekunde ($\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$).
c) Erkläre, wie hoch die Geschwindigkeit maximal werden kann.
d) Berechne, nach welcher Zeit die Kugel 95 % der Endgeschwindigkeit erreicht hat.

18. Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Wir nehmen zunächst an, dass die Vermehrung exponentiell erfolgt, d.h. $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda_E \cdot t}$.
a) Berechne die Wachstumskonstante λ_E.
b) Ermittle die jährliche Vermehrungsrate in Prozent.
c) Wann hat sich die Population verdoppelt?

19. In der Realität ist unbegrenztes Wachstum nicht möglich. Wenn die Zahl der Tiere aus Bsp. 18 nach oben begrenzt ist (beschränktes Wachstum), lässt sich die Vermehrung besser durch folgende Funktion beschreiben:
$$N(t) = G - (G - N_0) \cdot e^{-\lambda_B \cdot t}$$
(N_0: Anfangswert, G: Kapazitätsgrenze).
Angenommen, die Tierpopulation aus dem vorigen Beispiel vermehrt sich nach dieser Formel. In dem Gebiet können höchstens 1000 Tiere leben.
a) Ermittle die Konstante λ_B.
b) Skizziere den Graphen der Wachstumsfunktion und beschreibe seinen Verlauf (insbesondere für große Werte von t).
c) Berechne, in welcher Zeit die Population von 200 auf 400 Tiere zunimmt.

20. (*) Die beste Näherung erhält man durch folgende Gleichung (logistisches Wachstum):
$$N(t) = \frac{N_0 \cdot G}{N_0 + (G - N_0) \cdot e^{-\lambda_L \cdot t}}$$
a) Überprüfe, dass sich mit den Werten aus Bsp. 18 und 19 $\lambda_L = 0{,}0575$ ergibt.
b) Skizziere den Graphen der Funktion N(t) und beschreibe das Wachstum der Population.
c) Wie lange braucht die Population in diesem Modell, um sich zu verdoppeln?

Ergebnisse:

1. a) $N(t) = 1000 \cdot 1{,}03^t$ b) 1343,92 € c) 23,4 Jahre
   d) Bei der Berechnung der Verdopplungszeit fällt das Anfangskapital weg
   e) i: falsch, ii: falsch, iii: annähernd richtig
2. a) $7200 \cdot q^{10} = 11700 \Rightarrow q \approx 1{,}05$ b) $N(t) = 7200 \cdot 1{,}05^t$
   c) 2019 (früher als bei linearer Zunahme, weil eine Exponentialfunktion stärker steigt)
3. a) $N(t) = 12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}015^t$; exponentiell, weil die prozentuelle Zunahme konstant ist
   b) $13{,}9 \cdot 10^6$ c) in 15 Jahren d) 0,0149/Jahr
4. a) $N(t) = 3 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}0178 \cdot t}$ b) 1,8% c) in 39 Jahren
   d) Nein, die Bevölkerung kann sich nicht unbegrenzt vermehren
5. a) 2009: 40, 2011: 60 b) 22,5 % c) 2014
   d) 3,5 Jahre
6. a) $N(t) = 1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}09^t$ bzw. $N(t) = 1 \cdot 10^6 \cdot e^{0{,}0866 \cdot t}$ b) 9 %
   c) ca. 500 bis 1000 (Kamele haben sich früher langsamer vermehrt als jetzt)
7. a) $A(t) = 15000 + 500t$, $E(t) = 15000 \cdot 1.03^t$ b) nach 8 Jahren
   c) Das hängt davon ab, wie lange man voraussichtlich in der Firma bleiben wird
8. a) $T(t) = 100 \cdot 0{,}85^t$ b) 44 °C; 20 °C
   c) nach 14 min; nach 18 min; (theoretisch) nie
9. a) exponentiell b) 25 %; ca. 5 cm c) 1 cm; 6 %
10. a) $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}000428 \cdot t}$ b) 0,958 g c) im Jahr 7280
11. a) $\lambda = 0{,}000121/a$ b) ca. 21000 Jahre c) ca. 57000 Jahre
12. a) $N(t) = N_0 \cdot 0{,}8^t$ bzw. $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ b) 3,1 h c) 532 mg
13. a) $N(t) = 80 \cdot 0{,}855^t$ bzw. $N(t) = 80 \cdot e^{-0{,}157 \cdot t}$ b) 14,5 % c) 4,4 h
14. a) $N(t) = 2{,}3 - 0{,}15 \cdot t$; nach 12 h
    b) $N(t) = 100 \cdot 0{,}9^t$ bzw. $N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}1954\, t}$; nach 7 Tagen
    c) a: linear (konstante absolute Abnahme), b: exponentiell (konstante prozentuelle Abnahme)
15. a) linear, weil die Temperatur pro km um denselben Betrag abnimmt; $T(h) = 15 - 6{,}5h$
    b) exponentiell, weil der Luftdruck pro km um denselben Faktor abnimmt; $p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126\, h}$; 11,84 %
16. a) Exponentialfunktion ist immer positiv b) 16,5 min
    c) $x + y = 15$, $70x + 15y = 37 \cdot 15$; 6 L heißes, 9 L kaltes Wasser
17. b) $v(0{,}1) = 0{,}31$ m/s; $a = 3{,}1$ m/s² c) 0,4 m/s d) 0,2 s
18. a) $\lambda_E = 0{,}0446$/Jahr b) 4,56% c) 15,5 Jahre
19. a) $\lambda_B = 0{,}0129$/Jahr b) Graph nähert sich asymptotisch der Geraden $y = 1000$
    c) 22 Jahre
20. b) s-förmiger Verlauf c) 17 Jahre