Ableitung von Polynomfunktionen

Ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = 3x + 4$
2. $f(x) = 12 - 2x$
3. $f(x) = x^4$
4. $f(x) = x^{10}$
5. $f(x) = 3 \cdot x^5$
6. $f(x) = 5 \cdot x^{12}$
7. $f(x) = 0{,}5 \cdot x^4$
8. $f(x) = \frac{x^6}{9}$
9. $f(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2$
10. $f(x) = -4 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 1$
11. $f(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x$
12. $f(x) = x^4 - 6 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 3$
13. $f(x) = 2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 8$
14. $f(x) = \frac{x^4}{2} + 4 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2$
15. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3 \cdot x^2}{4} + \frac{5 \cdot x}{2} - \frac{1}{3}$
16. $f(x) = \frac{x^{10}}{5} + \frac{2 \cdot x^6}{9} - \frac{5 \cdot x^2}{2}$

Berechne die Ableitung von f an der Stelle x_0 und gib die Gleichung der Tangente an:

17. $f(x) = 3 \cdot x^2$	$x_0 = 1$
18. $f(x) = -x^3$	$x_0 = 2$
19. $f(x) = 4 \cdot x - x^2$	$x_0 = 3$
20. $f(x) = x^3 - 9 \cdot x$	$x_0 = -2$
21. $f(x) = 7 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 8$	$x_0 = -1$
22. $f(x) = \frac{x^4}{9}$	$x_0 = 3$
23. $f(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1$	$x_0 = 2$
24. $f(x) = 2 \cdot x^5 - 5 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2$	$x_0 = 1$

25. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 6$.
    a. In welchen Punkten des Graphen ist
        i. $f(x) = 1$,
        ii. $f(x) = -2$,
        iii. $f(x) = 0$?

        Wie groß ist die Steigung an diesen Stellen?
    b. In welchen Punkten des Graphen ist
        i. $f'(x) = 1$,
        ii. $f'(x) = -2$,
        iii. $f'(x) = 0$?

26. Wie groß ist der Anstieg der Kurve $y = x^3 - 5 \cdot x^2 + 6 \cdot x$ in ihren Schnittpunkten mit der x–Achse?
27. In welchen Punkten und unter welchem Anstieg schneidet die Kurve $y = 3 \cdot \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$ die x–Achse?
    In welchen Punkten besitzt die Kurve eine zur x–Achse parallele Tangente?
28. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2 \cdot x^3 + \frac{9 \cdot x^2}{2}$.
    In welchen Punkten hat der Graph eine waagrechte Tangente?
29. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x$.
    In welchen Punkten des Graphen haben die Tangenten die Steigung $k = 3$?
    Bestimme die Gleichungen der Tangenten.
30. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 4$.
    In welchen Punkten des Graphen sind die Tangenten parallel zur 1. Mediane?
    Bestimme die Gleichungen der Tangenten.

Kurvendiskussionen

Untersuche und zeichne folgende Funktionen (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Gleichung der Wendetangenten):

31. $f(x) = x^2 - x - 2$
32. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$
33. $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$
34. $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3$
35. $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3 \cdot x$
36. $f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2$
37. $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$
38. $f(x) = x^3 + \frac{x}{2} - 9$
39. $f(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x$
40. $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x$
41. $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 27)$
42. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (-x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 5)$
43. $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 20)$
44. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8)$
45. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + x^2 - x - 1)$

46. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^4 - 6 \cdot x^2 + 9)$
47. $f(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 5$
48. $f(x) = -\frac{x^4}{2} + x^2 + 4$
49. $f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{3 \cdot x^3}{2} + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot x$
50. $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot x^4 - 22 \cdot x^3 + 36 \cdot x^2)$

Umgekehrte Kurvendiskussion (Aufsuchen von Polynomfunktionen)

Ermittle die Gleichungen der folgenden Funktionen:

51. Eine Parabel geht durch die Punkte A = (2/4) und B = (–4/7); in A hat sie die Steigung 1.
52. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat den Hochpunkt H = (0/5) und den Wendepunkt W = (1/3).
53. Der Graph einer Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y–Achse und hat in W = (2/0) einen Wendepunkt. Der Anstieg der Wendetangente beträgt –8.
54. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $\left(0 \middle| \frac{5}{3}\right)$ die Steigung k = 3 und im Punkt (–1/0) einen Extremwert.
55. Der Graph einer Funktion 3. Grades berührt die x–Achse im Punkt (2/0) und hat bei (1/3) einen Wendepunkt.
56. Der Graph einer Funktion 3. Grades geht durch den Koordinatenursprung. Der Wendepunkt ist W = (2/5), und die Wendetangente hat die Steigung $\frac{1}{2}$
57. Eine Funktion 4. Grades hat im Koordinatenursprung einen Wendepunkt mit der Steigung –2. Im Punkt (2/0) beträgt die Steigung 12.
58. Der Graph einer Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y–Achse. Er hat bei (2/0) einen Tiefpunkt und geht durch den Punkt $\left(1 \middle| \frac{9}{4}\right)$.
59. Der Graph einer Funktion 5. Grades ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Im Punkt (1/3) hat er einen Wendepunkt, die Steigung der Wendetangente ist $\frac{17}{3}$.
60. Die Gerade g geht durch die Punkte P = (0/3) und Q = (5/8). Der Graph der Funktion f, einer Polynomfunktion 3. Grades, berührt die Gerade g in P und schneidet sie in Q. Außerdem schneidet er die x–Achse in N = (–1/0). Ermittle die Gleichungen von g und f.
61. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat bei x = 4 eine Nullstelle und bei x = 2 einen Wendepunkt. Die Gleichung der Wendetangente lautet: y = 3·x – 4.

Ermittle in den folgenden Beispielen die Gleichung von g(x) und skizziere beide Funktionen!

62. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3 \cdot x^2}{2}$.
Die quadratische Funktion g hat dieselben Nullstellen wie f. Bei x = 0 beträgt ihre Steigung $\frac{9}{2}$.
63. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3 \cdot x^2}{4}$.
Der Graph der quadratischen Funktion g berührt den Graphen von f in dessen Hochpunkt und schneidet ihn im Punkt P = (8/y_P).
64. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3 \cdot x}{2} + 2$.
Der Graph der quadratischen Funktion g(x) berührt den Graphen von f(x) in dessen Wendepunkt und schneidet ihn im Punkt P = (6/y_P).
65. Der Graph der quadratischen Funktion g(x) berührt den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{3 \cdot x^2}{2}$ in dessen Wendepunkten.

Ergebnisse:

1. $f'(x) = 3$
2. $f'(x) = -2$
3. $f'(x) = 4 \cdot x^3$
4. $f'(x) = 10 \cdot x^9$
5. $f'(x) = 15 \cdot x^4$
6. $f'(x) = 60 \cdot x^{11}$
7. $f'(x) = 2 \cdot x^3$
8. $f'(x) = \frac{2 \cdot x^5}{3}$
9. $f'(x) = 2 \cdot x - 3$
10. $f'(x) = -8 \cdot x + 5$
11. $f'(x) = 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5$
12. $f'(x) = 4 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 10 \cdot x$
13. $f'(x) = 6 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 7$
14. $f'(x) = 2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 10 \cdot x$
15. $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{5}{2}$
16. $f'(x) = 2 \cdot x^9 + \frac{4 \cdot x^5}{3} - 5x$
17. $y = 6 \cdot x - 3$
18. $y = -12 \cdot x + 16$
19. $y = -2 \cdot x + 9$
20. $y = 3 \cdot x + 16$
21. $y = 3 \cdot x - 3$
22. $y = 12 \cdot x - 27$
23. $y = -1$
24. $y = -4 \cdot x + 4$
25.
    a.
        i. (1/1), k = –4; (5/1), k = 4
        ii. (2/–2), k = –2; (4/–2), k = 2
        iii. (1,27/0), k = –3,46; (4,73/0), k = 3,46
    b.
        i. (3,5/–2,75) ii. (2/–2) iii. (3/–3)

26. (0/0), k = 6; (2/0), k = –2; (3/0), k = 3

27. (0/0), k = 3/2; (3/0), k = –3; (–3/0), k = –3; (√3/√3); (–√3/–√3)

28. $f'(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$; (0/0), (3/6,75)

29. $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 6$; (–1/2), t_1: y = 3·x + 5; (3/–18), t_2: y = 3·x – 27

30. $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 10$; (1/1), t_1: y = x; (3/-1), t_2: y = x - 4

31. N_1 = (–1/0), N_2 = (2/0), T = (0,5/–2,25)

32. N_1 = (1/0), N_2 = (5/0), H = (3/2)

33. N_1 = (0/0), N_2 = T = (3/0), H = (1/4), W = (2/2), t_W: y = –3·x + 8

34. N_1 = W_1 = (0/0), N_2 = (4/0), H = (3/6,75), W_2 = (2/4), t_1: y = 0, t_2: y = 4·x – 4

35. N_1 = W = (0/0), $N_{2,3}$ = (±√12/0), T = (2/–4), H = (–2/4), t_W: y = –3·x

36. N_1 = T(0/0), N_2 = (–6/0), $\mathrm{H} = \left(-4 \middle| 5\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{W} = \left(-2 \middle| 2\frac{2}{3}\right)$, $t_W{:}\, y = -2 \cdot x - \frac{4}{3}$

37. N_1 = (–1/0), N_2 = T = (2/0), H = (0/4), W = (1/2), t_W: y = –3·x + 5

38. N = (2/0), W = (0/–9), $t_W{:}\, y = \frac{x}{2} - 9$

39. N = (0/0), W = (1/2), t_W: y = 2

40. N_1 = (0/0), N_2 = T = (6/0), H = (2/8), W = (4/4), t_W: y = –3·x + 16

41. N_1 = T = (3/0), N_2 = (–3/0), H = (–1/8), W = (1/4), t_W: y = –3x + 7

42. N_1 = T = (–1/0), N_2 = (5/0), $\mathrm{H} = \left(3 \middle| 10\frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{W} = \left(1 \middle| 5\frac{1}{3}\right)$, $t_W{:}\, y = 4 \cdot x + \frac{4}{3}$

43. N = (–2/0), H = (0/5), T = (2/4), W = (1/4,5), t_W: y = –0,75·x + 5,25

44. N = (–1/0), W = (1/5), t_W: y = 0,5·x + 4,5

45. N_1 = H = (–1/0), N_2 = (1/0), $\mathrm{T} = \left(\frac{1}{3} \middle| -\frac{16}{27}\right)$, $\mathrm{W} = \left(-\frac{1}{3} \middle| -\frac{8}{27}\right)$, $t_W{:}\, y = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{14}{27}$

46. $N_{1,2}$ = $T_{1,2}$ = (±√3/0), H = (0/4,5), $W_{1,2}$ = (±1/2), t_W: y = ∓4·x + 6

47. $N_{1,2}$ = $W_{1,2}$ = (±2/0), $N_{3,4}$ = (±√20/0), $T_{1,2}$ = (±√12/–4), H = (0/5), t_W: y = ∓4·x + 8

48. $N_{1,2}$ = (±2/0), T = (0/4), $H_{1,2}$ = (±1/4,5), $W_{1,2}$ = (±0,58 / 4,28), $t_{1,2}$: y = ±0,77·x + 3,83

49. N_1 = (0/0), N_2 = W_1 = (4/0), T = (1/–3,375), W_2 = (2/–2), t_1: y = 0, t_2: y = 2·x – 6

50. N_1 = T_1 = (0/0), N_2 = (2,46/0), N_3 = (4,87/0), T_2 = (4/–5,33), H = (1,5/1,83),
W_1 = (0,67/0,84), W_2 = (3/–2,25), t_1: y = 1,85·x – 0,40, t_2: y = –4,5·x + 11,25

51. $f(x) = \frac{x^2}{4} + 3$

52. $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$

53. $f(x) = \frac{x^4}{8} - 3 \cdot x^2 + 10$

54. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3 \cdot x + \frac{5}{3}$

55. $f(x) = \frac{3 \cdot x^3}{2} - \frac{9 \cdot x^2}{2} + 6$

56. $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3 \cdot x^2 + \frac{13 \cdot x}{2}$

57. $f(x) = x^4 - \frac{3 \cdot x^3}{2} - 2 \cdot x$

58. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2 \cdot x^2 + 4$

59. $f(x) = -x^5 + \frac{10 \cdot x^3}{3} + \frac{2 \cdot x}{3}$

60. $g(x) = x + 3$; $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5 \cdot x^2}{3} + x + 3$

61. f(x) = $-x^3 + 6 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 4$

62. $g(x) = -\frac{3 \cdot x^2}{4} + \frac{9 \cdot x}{2}$

63. $g(x) = \frac{x^2}{4} + 4$

64. $g(x) = \frac{3 \cdot x^2}{4} - \frac{3 \cdot x}{2} + 2$

65. g(x) = $x^2 + 1$