Differentialrechnung (Anwendungen)

1. Ableitung

1) Eine Kugel wird aus Bodenhöhe schräg nach oben geworfen. Die Wurfbahn kann durch die Funktion $h(x) = x - 0{,}025 \cdot x^2$ dargestellt werden (x: horizontale Entfernung in m, h: Höhe in m).
   a) An welcher Stelle befindet sich der höchste Punkt der Bahn?
   b) Wo trifft die Kugel am Boden auf
      i) in horizontalem Gelände
      ii) auf einem unter 20% ansteigendem Hang (d.h. $k = 0{,}2$)
      iii) auf einem unter 15% abfallenden Hang ($k = -0{,}15$)?
2) Ein Seil überspannt einen 40 m breiten Graben bei einer Höhendifferenz von 12 m. Die Form des Seils entspricht näherungsweise der Kurve $y = 0{,}01 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x$ zwischen den Punkten A = (0/0) und B = (40/12) (Maße in m).
   a) Berechne die Neigung des Seils in den Endpunkten.
   b) Ermittle den tiefsten Punkt der Kurve.
   c) In welchem Punkt der Kurve ist die Tangente parallel zur Geraden AB? Gib die Gleichung der Tangente an und berechne den Durchhang des Seils, d.h. den senkrechten Abstand zwischen der Tangente und der Geraden AB.
3) Beim Kugelstossen beschreibt die Kugel annähernd eine Parabel. Bei einem bestimmten Wurf kann diese Parabel durch die Funktion

   $$f(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}6$$

   beschrieben werden (x: horizontale Entfernung in m, y: Höhe in m).
   a) In welcher Höhe wird die Kugel abgestoßen?
   b) Ermittle die durchschnittliche Steigung der Flugbahn im Intervall [2; 6].
   c) Berechne die Koordinaten des höchsten Punkts der Bahn.
   d) In welcher Entfernung trifft die Kugel auf dem Boden auf?
4) Ein Fußballspieler spielt einen langen Pass. Wenn man den Luftwiderstand berücksichtigt, kann die Bahn des Balls durch die Funktion

   $$f(x) = -0{,}0006 \cdot x^3 - 0{,}007 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x$$

   angenähert werden (x: horizontale Entfernung in m, y: Höhe in m).
   a) Berechne, in welcher Entfernung der Ball auf dem Boden auftrifft.
   b) Bestimme den höchsten Punkt der Bahn.

2. Ableitung

5) Eine Eisenbahnkurve wird durch einen Kreisbogen vom Radius r = 200 m gebildet. Damit keine plötzlichen Fliehkräfte auftreten, schaltet man zwischen Gerade und Kreisbogen eine "Übergangskurve". Diese kann durch die Funktion $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^3}{72000}$ dargestellt werden (Maße in m). Im Endpunkt der Übergangskurve gilt: $\mathrm{f''(x)} = \frac{1}{\mathrm{r}}$.
   Berechne die Koordinaten des Endpunkts, die Steigung der Tangente und die Richtungsänderung, d.h. den Winkel zwischen Tangente und x-Achse.

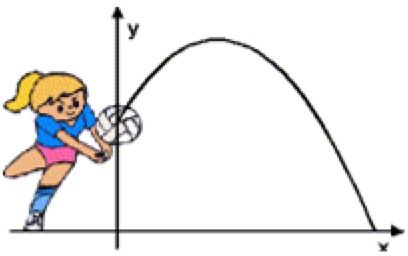
6) Die Achterbahn „Son of Beast" (Ohio, USA) war von 2000 bis 2009 die höchste Holzachterbahn der Welt. Die erste steile Abfahrt (first drop) kann näherungsweise durch den Graphen der folgenden Funktion beschrieben werden:
$$f(x) = \frac{x^3}{1800} - \frac{x^2}{20} + 65$$
   (Maße in Meter, 0 ≤ x ≤ 60)
   a) Erkläre, welchen Punkt der Kurve man ermitteln muss, um das maximale Gefälle (negative Steigung) zu berechnen.
   b) Berechne das maximale Gefälle in Prozent und gib auch den Neigungswinkel an.

7) Die Flugbahn eines Hubschraubers kann im ersten Abschnitt des Fluges durch den Graphen der folgenden Funktion angenähert werden:
$$h(x) = 0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x$$
   (x: horizontale Entfernung in km, h: Höhe in km).
   a) Skizziere die Flugbahn im Intervall [0; 10].
   b) Ermittle die Koordinaten des Wendepunkts.
   c) Interpretiere die Bedeutung des Wendepunkts im Sachzusammenhang.

8) In der Saison 2017/18 gab es in Wien eine besonders heftige Grippewelle. Die Gesamtzahl der Erkrankten (einschließlich Genesene und Verstorbene) in den ersten 12 Wochen des Jahres 2018 kann näherungsweise durch folgende Funktion dargestellt werden:
$$f(t) = -\frac{1}{12} \cdot t^3 + \frac{3}{2} \cdot t^2 + 5 \cdot t$$
   (t: Zeit in Wochen seit Jahresbeginn, f(t): Anzahl der Erkrankten in Tausend).
   a) Ermittle den Zeitpunkt t_0, zu dem die Anzahl der Erkrankten am stärksten anstieg.
   b) Berechne $f'(t_0)$ und interpretiere diesen Wert im Sachzusammenhang.

Umkehraufgaben

9) Eine Wäscheleine ist an zwei gleich hohen, 6 m voneinander entfernten Punkte aufgehängt. In der Mitte hängt sie 15 cm durch. Die Form der Leine kann durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.
   a) Lege den Koordinatenursprung in den linken Endpunkt der Leine und ermittle die Gleichung der Funktion (Maße in m).
   b) Berechne die Neigung und den Neigungswinkel der Wäscheleine in ihren Endpunkten.
10) Ein Ball wird von einem 45 m hohen Turm in waagrechter Richtung weggeworfen. Er trifft 15 m vom Turm entfernt auf dem Boden auf. Die Wurfbahn ist eine Parabel.
   a) Ermittle die Gleichung der Wurfbahn. (Der Anfangspunkt ist ein Hochpunkt.)
   b) Berechne den Winkel, unter dem der Ball auf den Boden trifft.
11) Eine Volleyballspielerin „baggert“ den Ball aus 0,9 m Höhe zurück. Die Wurfbahn ist annähernd eine Parabel; ihr höchster Punkt liegt 4 m von der Spielerin entfernt in 2,5 m Höhe.
   a) Ermittle die Gleichung der Parabel.
   b) In welchem Abstand fliegt der Ball über das Netz, das 5 m von der Spielerin entfernt und 2,35 m hoch ist?
   c) Wo trifft der Ball auf dem Boden auf, wenn er nicht zurückgespielt wird?
   d) Unter welchem Winkel hat die Spielerin den Ball hochgeworfen, und unter welchem Winkel trifft er auf dem Boden auf?



12) Zwei 100 m hohe Hochhäuser stehen 90 m voneinander entfernt. Vom Dach des einen wird eine Kugel mit der Steigung 0,75 schräg nach oben geschossen. Der höchste Punkt der Bahn liegt in einer horizontalen Entfernung von 30 m vom Ausgangspunkt.
   a) Ermittle die Gleichung der Wurfbahn als quadratische Funktion.
   b) Berechne, in welcher Höhe die Kugel das andere Hochhaus trifft.
13) Ein Tennisfeld ist 24 m lang. Ein Spieler steht an der Grundlinie und schlägt den Ball aus 1,4 m Höhe ab. Beim Abschlag hat die Bahnkurve die Steigung 0,51. Der höchste Punkt der Bahn liegt genau über dem Netz in der Mitte des Spielfelds in 5 m Höhe.
   a) Unter Berücksichtigung des Luftwiderstands kann die Bahn des Balls durch eine Funktion 3. Grades angenähert werden. Bestimme die Funktionsgleichung.
   b) Entscheide, ob der Ball noch innerhalb des Feldes auftrifft.
   c) In welcher Entfernung von der gegenüberliegenden Grundlinie muss der Gegner stehen, damit er den Ball ebenfalls in 1,4 m Höhe zurückschlagen kann?

14) Die zweite Abfahrt der Achterbahn „Son of Beast" (Bsp. 8) kann ebenfalls durch eine Polynomfunktion 3. Grades dargestellt werden. Sie beginnt in 50 m Höhe mit einem Hochpunkt. Der Wendepunkt liegt in einer horizontalen Entfernung von 40 m vom Anfangspunkt, die Steigung beträgt dort –0,9.
Ermittle die Funktion g, die den Verlauf der Bahn in diesem Bereich beschreibt. Nimm dabei den Koordinatenursprung am Beginn der Abfahrt auf Bodenhöhe an.

15) Ein Schmidt-Teleskop besteht aus einem sphärischen (kugelförmigen) Spiegel und einer Korrekturlinse. Die eine Seite dieser Schmidt-Platte ist eben geschliffen, die Querschnittskurve der anderen Seite wird durch folgende Funktion beschrieben (für eine Platte mit dem Radius 10 cm und bestimmte Maße des Spiegels):
$$f(x) = 10 - 6 \cdot (x^4 - 100 \cdot k \cdot x^2)$$
Dabei ist x der Abstand vom Linsenzentrum (alle Maße in cm), die Konstante k kann einen Wert zwischen 0 und 2 annehmen.
   a) Ermittle die Extrempunkte der Funktion für k = 1.
   b) Wie muss k gewählt werden (bei sonst gleichen Angaben), damit die Tiefpunkte am Rand der Linse liegen? Wieviel muss in diesem Fall abgeschliffen werden?

Elastische Linie: Wenn ein Träger belastet wird, nimmt er eine Form an, die durch eine Polynomfunktion beschrieben werden kann. Dabei gilt:

- In einem waagrecht eingespannten Ende hat die Kurve einen Hochpunkt.
- In einem freien Ende hat die Kurve einen Wendepunkt.

Nehmen Sie bei den folgenden Beispielen den Koordinatenursprung immer im linken Endpunkt an.

16) Ein 5 m langer Balken wird am linken Ende eingespannt und am rechten Ende belastet. Dadurch senkt sich das Ende um 10 cm.
   a) Ermittle die Gleichung der Biegelinie (Funktion 3. Grades, Maße in m).
   b) Wie groß ist die Neigung im rechten Endpunkt?

17) Ein 2 m langes Regalbrett liegt an beiden Enden frei auf. Wenn es auf der ganzen Länge gleichmäßig belastet wird, biegt es sich in der Mitte um 6 cm durch.
   a) Ermittle die Gleichung der Biegelinie (Funktion 4. Grades, Maße in m).
   b) Wie groß ist die Neigung in den Endpunkten?

18) Wenn das Brett aus dem vorigen Beispiel an beiden Enden eingespannt wird, beträgt die Durchbiegung (bei gleicher Belastung) nur mehr 2 cm.
   a) Auch hier ist die Biegelinie eine Kurve 4. Grades – ermittle ihre Gleichung.
   b) Berechne außerdem die Koordinaten der Wendepunkte und die Steigung sowie den Neigungswinkel der Wendetangenten.

Geschwindigkeitsaufgaben

19) Der Weg eines Autos beim Anfahren ist durch die Funktion $s(t) = 1{,}5 \cdot t^2$ gegeben (s: Weg in m, t: Zeit in s).
    a) Ermittle die Beschleunigung.
    b) Berechne, wie lange das Auto braucht, um 60 m weit zu fahren, und welche Geschwindigkeit es am Ende dieses Zeitraums hat.
20) Der Weg eines Autos beim Bremsen wird durch die Funktion $s(t) = 20 \cdot t - 2 \cdot t^2$ beschrieben.
    a) Ermittle die Bremsverzögerung (negative Beschleunigung).
    b) Berechne, wie lange das Auto bis zum Stillstand braucht und wie lange der Bremsweg ist.
21) Ein Ball wird von einem 45 m hohen Turm fallengelassen. Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands wird die Höhe des Balls durch die Funktion $h(t) = 45 - 5 \cdot t^2$ beschrieben. Berechne, wann und mit welcher Geschwindigkeit der Ball auf dem Boden auftrifft.
22) Ein Lift fährt in einem Hochhaus nach oben. Seine Höhe im Intervall $0 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$ kann durch die Funktion $h(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}6t^2$ angenähert werden.
    a) Zeige, dass der Lift nach 20 Sekunden in 80 m Höhe zum Stillstand kommt.
    b) Skizziere die Graphen der Weg- und Geschwindigkeitsfunktion und erläutere den Zusammenhang.
    c) Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit des Lifts beim Hochfahren.
    d) Wie hoch ist die maximale Geschwindigkeit, die der Lift erreicht?
23) Section Control im Kaisermühlentunnel:
    Auf der A 22 (Donauuferautobahn) wird die Zeit gemessen, in der ein Fahrzeug die Strecke zwischen km 1,450 und 3,750 zurücklegt. Die zulässige Höchstgeschwindigkeit beträgt 80 km/h. (Gib alle Geschwindigkeiten in m/s an; 1 m/s = 3,6 km/h)
    a) Herr X braucht 110 s. Kann man mit Sicherheit sagen, dass er die Höchstgeschwindigkeit eingehalten hat?

    Eine genauere Messung ergibt:

Zeit in s	0	50	60	110
Weg in m	1450	2450	2750	3750

    b) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit in den angegebenen Zeitabschnitten.
    c) Modelliere den Verlauf der Fahrt durch eine Funktion 3. Grades, die die in b) angegebenen Werte annimmt. Berechne die maximale Geschwindigkeit, die bei diesem Modell erreicht wird.

Ergebnisse:

1) a) H = (20/10) b) (40/0); (32/6,4); (46/-6,9)

2) a) A: -0,1, B: 0,7 b) T = (5/–0,25) c) P = (20/2); t: y = 0,3·x – 4; Durchhang: 4 m

3) a) 1,6 m b) 0,3 c) H = (7/4,05) d) 16 m

4) a) 30 m b) H ≈ (16,9/7,8)

5) P = (60/3); k = 0,15, α = 8,5°

6) a) Wendepunkt b) x = 30, f''(30) = –1,5 ⇒ 150 % Gefälle, α = 56,3°

7) a) W = (5/3) b) In diesem Punkt ist die Steigung der Flugbahn am niedrigsten.

8) a) $t_0 = 6$

b) $f'(6) = 14$, d.h. nach 6 Wochen gab es 14000 Neuerkrankungen pro Woche.

9) a) $f(x) = \frac{x^2}{60} - \frac{x}{10}$ b) k = ±0,1, α = ±5,71°

10) a) f(x) = 45 – 0,2·x² b) –80,5°

11) a) f(x) = –0,1·x² + 0,8·x + 0,9 b) 0,05 m (f(5) = 2,4)

c) nach 9 m d) 38,66°; –45°

12) a) f(x) = –0,0125·x² + 0,75·x + 100 b) 66,25 m

13) a) f(x) = –0,000625·x³ – 0,01·x² + 0,51·x + 1,4

b) ja (x = 23,31) c) 2,34 m

14) $g(x) = \frac{3}{16000} \cdot x^3 - \frac{9}{400} \cdot x^2 + 50$

15) a) H = (0/0), $T_{1,2}$ = (±7,07/-0,0025) b) k = 2; 0,01 cm

16) a) y = 0,0004·x³ – 0,006·x² b) k = –0,03, α = –1,72°

17) a) y = 0,012·(–x⁴ + 4·x³ – 8·x) b) k = ±0,096, α = ±5,48°

18) a) y = 0,02·(–x⁴ + 4x³ – 4x²)

b) W_1 = (0,42/–0,01), W_2 = (1,58/–0,01), k = ±0,03, α = ±1,76°

19) a) a = 3 m/s² b) t = 6,32 s, v(6,32) = 18,97 m/s

20) a) a = –4 m/s² b) t = 5 s, s = 50 m

21) t = 3 s, v(3) = 30 m/s

22) a) f'(20) = 0. f(20) = 80 c) 4 m/s d) 6 m/s

23) a) nein b) 20 m/s – 30 m/s – 20 m/s

c) $s(t) = -\frac{1}{330} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{85}{33} \cdot t + 1450$, $v_{max} = s'(55) = 30{,}08$ m/s